Р2-2012-141

А. Б. Пестов [*]

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ. ГРАВИДИНАМИКА

[*]E-mail: pestov@theor.jinr.ru

Пестов А. Б. P2-2012-141
Геометрическая теория фундаментальных взаимодействий.
Гравидинамика

Дана математическая формулировка основных концепций единой геометрической теории фундаментальных взаимодействий, упоминаемой как общая квантовая механика. Введено понятие импульса гравитационного поля, выведены уравнения гравидинамики, найдены выражения для кинетической энергии, потенциальной энергии и вектора потока энергии гравитационного поля. Установлена наиболее общая форма закона сохранения энергии, из которого следует, что энергия гравитационного поля есть гипотетическая темная энергия. Предъявлены характерные решения уравнений гравидинамики, и дана их физическая интерпретация.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2012

Pestov I. B. P2-2012-141
Geometric Theory of Fundamental Interactions.
Gravidynamics

In this report a mathematical formulation of fundamental concepts of unified geometrical theory of fundamental interactions is given. A concept of momentum of the gravitational field is introduced, equations of gravidynamics are derived, expressions for kinetic energy, potential energy and energy flow vector of the gravitational field are found. A most general form of the law of energy conservation is established, from which it follows that the hypothetical dark energy is the energy of the gravitational field. Two exact solutions of the equations of gravidynamics are obtained and their physical interpretation is given.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2012

ВВЕДЕНИЕ

В этом сообщении, посвященном главным образом динамической теории гравитационных процессов как раздела общей квантовой механики, введены важные для теории в целом физические концепции: понятие физического многообразия, понятие собственно геометрической полевой величины, новая концепция времени, которая раскрывает многогранность времени как центрального понятия единой физики, понятие локальной геометрической внутренней симметрии, понятие билатеральной или двухсторонней симметрии, которая позволяет идею зеркальной симметрии, симметрии правого и левого, перенести в теорию поля. Совокупность собственно геометрических полевых величин образует структурное поле. Фундаментальными составляющими структурного поля являются гравитационное поле, спиновое поле и обобщенное электромагнитное поле, названное так потому, что синглетное состояние этого поля соответствует электромагнитному полю. Различные аспекты природы представляют собой различные аспекты структурного поля, переносящего энергию и импульс, что обеспечивает единый подход к фундаментальным взаимодействиям и позволяет рассматривать микромир и макромир с единых позиций. Первым интегралом уравнений структурного поля, объединяющих все энергии и взаимодействия в природе, будет только плотность энергии структурного поля, равная сумме вкладов от каждой из его составляющих.

В общей квантовой механике гравитационному полю как одной из составляющих структурного поля ставится в соответствие положительно определенная риманова метрика как фундаментальное понятие. Псевдориманова метрика лоренцевой сигнатуры, положенная в основу общей теории относительности, вводится в гравидинамике как причинная структура, тесно связанная с дискретной внутренней симметрией, упоминаемой как двухсторонняя или билатеральная симметрия. Это позволяет понять геометрические и симметрийные аспекты происхождения концепции псевдоримановой метрики на основе истинной римановой метрики и раскрыть причинную структуру уравнений гравидинамики, т. е. представить их в следующей общековариантной динамической форме: скорость изменения импульса гравитационного поля со временем равна результату действия на потенциал гравитационного поля некоторого нелинейного дифференциального оператора.

Установление симметрии, отвечающей за закон сохранения энергии в наиболее общей форме, однозначное определение энергии гравитационного поля и вектора потока энергии гравитационного поля, а также решение уравнений гравидинамики позволяют решить проблему так называемой темной энергии, которая представляет собой энергию гравитационного поля. Особая роль гравитационной составляющей структурного поля проявляется в принципе репараметризационной инвариантности и в механизме генерации физического многообразия, который позволяет каждому состоянию структурного поля поставить в соответствие свое физическое многообразие.

1. КОНЦЕПЦИЯ ФИЗИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

Напомним, что первоосновой общей квантовой механики как теории структурного поля служит гипотеза геометризации: все в понятии пространства и понятие пространства во всем. Этот раздел посвящен математическому обоснованию трактовки пространства как гладкого многообразия и изложению концепции физического многообразия. Суть ее состоит в следующем. Если рассматривать многообразие как заранее заданное, то оно будет внешним по отношению к физической системе, и изменение характеристик многообразия будет влиять на поведение изучаемой системы. Обратное при этом полностью исключается. Так как общая квантовая механика есть теория реальных физических процессов, протекающих без всякого отношения к чему-либо внешнему, то в ней многообразие не может быть заданным заранее, как это обычно практикуется в геометрии и физике. Необходимо указать механизм генерации многообразия, соответствующего каждому состоянию полной системы полей. Многообразие, которое ставится в соответствие каждому решению уравнений полной системы полей, называется физическим многообразием. Прежде чем установить механизм генерации физического многообразия, будет доказано, что принципы общей ковариантности и репараметризационной инвариантности естественным образом включены в понятие многообразия, а также будет введена концепция собственно геометрической полевой величины и рассмотрены некоторые другие вопросы.

Многообразие не является топологически тривиальным, если оно не может быть обслужено одной системой координат. Для простоты предположим, что достаточно двух систем координат. Таким образом, имеются две открытые области U и $\bar{U}$, объединение которых дает все многообразие, и два отображения, устанавливающие взаимно-однозначные соответствия между U и областью пространства R^n и, соответственно, между $\bar{U}$ и другой областью пространства R^n. В области перекрытия U и $\bar{U}$ действуют две системы координат $u^1,\, u^2, \ldots, u^n$ и $\bar{u}^1,\, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n$, между которыми имеется связь в виде функциональных соотношений

$$\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1,\, u^2, \ldots, u^n), \quad u^i = u^i(\bar{u}^1,\, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n), \quad i = 1,\, 2,\, \ldots, n,$$

которые называются преобразованием координат. Пусть наборы функций

$$g_{ij}(u^1,\, u^2, \ldots, u^n), \quad \overline{g}_{ij}(\bar{u}^1,\, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n)$$

задают риманову метрику соответственно в областях U и $\bar{U}$. Тогда в простейшем случае в области перекрытия V между этими функциями существуют соотношения вида

$$\overline{g}_{ij} = \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^j} g_{kl},$$

которые есть условия сшивки. Так как условия сшивки должны выполняться для всех полей, то уравнения полной системы полей должны быть общековариантными или, иначе говоря, тензорными.

В общем случае может произойти следующее. Предположим, что найдено решение уравнений, представляющих одно и то же гравитационное поле в обеих областях, однако условие сшивки в области пересечения не выполняется. Выход из этого положения может быть следующим. Рассмотрим отображение φ области U на себя, которое в системе координат $u^1,\, u^2, \ldots, u^n$ определяется следующим образом:

$$\varphi : u^i \Rightarrow \varphi^i(u^1,\, u^2, \ldots, u^n), \quad \varphi^{-1} : u^i \Rightarrow \theta^i(u^1,\, u^2, \ldots, u^n),$$

$$\varphi^i(\theta^1(u),\, \theta^2(u), \ldots, \theta^n(u)) = u^i, \quad \theta^i(\varphi^1(u),\, \varphi^2(u), \ldots, \varphi^n(u)) = u^i.$$

Отображение φ задает отображение $\widetilde{g} = \varphi g$, которое имеет следующий вид:

$$\widetilde{g}_{ij}(u) = g_{kl}(\theta(u))\theta^k_i(u)\theta^l_j(u),$$

где $\theta^l_j(u) = \partial_j \theta^l(u)$. Если в рассматриваемой области ввести новые координаты и записать отображение φ в новых координатах, то можно убедиться, что при преобразовании координат $\widetilde{g}_{ij}(u)$ преобразуются как компоненты симметричного тензорного поля. Если $g_{ij}(u)$ и $\widetilde{g}_{ij}(u)$ представляют различные решения одного и того же уравнения, то это уравнение называется инвариантным относительно репараметризации, которая задается отображением φ. Обратно, если уравнения инвариантны относительно репараметризации, то по данному решению этих уравнений можно построить класс новых решений тех же самых уравнений. Таким образом, в общем случае для установления связи между g и $\overline{g}$ может потребоваться и поле $\widetilde{g}$, эквивалентное g. Отсюда следует, что уравнения полной системы полей на топологически нетривиальных многообразиях должны быть не только общековариантными, но и иваариантными относительно репараметризации. Если взять одно гравитационное поле, то только для него можно записать уравнения и общековариантные, и инвариантные относительно репараметризации. Например, уравнения Максвелла общековариантны, но они не инвариантны относительно репараметризации. Для более наглядного представления репараметризации рассмотрим еще одну ситуацию.

Введем класс функций $\tau = \alpha(t)$, область определения и область значений которых совпадают. Если $t \in [a, b]$, то и $\tau \in [a, b]$. Каждая из этих функций задает траекторию движения в виде $u^i = \varphi(\alpha(t)), i = 1, 2, \ldots, n$, но всем траекториям соответствует одно и то же геометрическое место точек. Если следить за движением точки вдоль различных траекторий, то при переходе с одной траектории на другую точка будет двигаться на одном и том же участке медленней или быстрей. Графически рассматриваемый класс функций можно представить на плоскости t, τ, отметив на ней точки (a, a), (a, b), (b, b), (b, a). Убывающие функции соединяют точки $(a, b), (b, a)$, а возрастающие функции соединяют точки (a, a), (b, b). К рассматриваемому классу функций принадлежат, в частности, отрезки прямых $\tau = t$, $\tau - b = -(t - a)$. Функции $\alpha(t)$ удовлетворяют одному из двух условий

$$\frac{d\alpha}{dt} > 0, \quad \frac{d\alpha}{dt} < 0,$$

которые задают ориентацию траектории движения. Уравнения движения точки инвариантны относительно репараметризации, если каждая траектория есть решение одной и той же системы уравнений. Функция Лагранжа $L(u, du/dt)$, удовлетворяющая уравнению

$$L\left(u, \frac{du}{dt}\right) dt = L\left(u, \frac{du}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right) dt = L\left(u, \frac{du}{d\tau}\right) d\tau,$$

дает уравнения движения точки, инвариантные относительно репараметризации.

Введем понятие собственно геометрической полевой величины. Геометрическую структуру многообразия составляют точки, кривые, конгруэнции кривых, семейства кривых (подмногообразия). Величины, непосредственно связанные с геометрической структурой многообразия, называются собственно геометрическими полевыми величинами. Установим набор собственно геометрических полевых величин с тем, чтобы при рассмотрении всех без исключения вопросов не выходить за рамки этого множества величин, как того требует гипотеза геометризации. Фактически это есть решение проблемы геометризации физических полей в математически строгом и точном смысле, обеспечивающее эвристическую ценность самой идеи геометризации.

Скалярное поле является простейшей собственно геометрической полевой величиной, которая может рассматриваться как отображение, которое каждой точке многообразия ставит в соответствие число. Рассмотрим далее функционалы на множестве кривых и подмногообразий. Кривая на многообразии есть геометрическое место точек, которое определяется уравнениями

$$\gamma : u^i = \varphi^i(t).$$

Семейство кривых (подмногообразие S_p) определяется уравнениями

$$S_p : u^i = \varphi^i(t_1, t_2, \ldots, t_p), \quad p = 2, 3, \ldots, n.$$

Криволинейный интеграл

$$\int a_i du^i = \int a_i \frac{du^i}{dt} dt$$

и его обобщение на семейства кривых в виде кратных интегралов

$$\int a_{i_1 \ldots i_p} \frac{\partial u^{i_1}}{\partial t^1} \ldots \frac{\partial u^{i_p}}{\partial t^p} dt^1 \ldots dt^p,$$

где a_i — компоненты ковекторного поля, а $a_{i_1 \ldots i_p}$ — компоненты антисимметричного тензорного поля ранга p, дает целый класс собственно геометрических полевых величин. В этот класс входят скалярное поле, ковариантное векторное поле и антисимметричные тензорные поля. Теорему Стокса следует рассматривать как важную дополнительную характеристику этого класса величин.

Согласно Гауссу и Риману функционал

$$l(\gamma, g) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt$$

на многообразии называется длиной кривой γ. Таким образом, функционал длины связан с симметричным положительно определенным тензорным полем второго ранга g_{ij}, которое, таким образом, есть собственно геометрическая полевая величина, впервые введенная Риманом.

Конгруэнция кривых (поток на многообразии) задается системой обычных дифференциальных уравнений первого или второго порядка. В первом случае эта система имеет вид

$$\frac{du^i}{dt} = v^i(u^1(t), u^2(t), \ldots, u^n(t)).$$

Правая сторона этой системы уравнений называется векторным полем на многообразии, и, следовательно, векторное поле принадлежит множеству собственно геометрических полевых величин. В другом случае система уравнений

$$\frac{d^2 u^i}{dt^2} + P^i_{jk} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} = 0$$

доставляет еще одну собственно геометрическую полевую величину с компонентами P^i_{jk}, известную как линейная связность. Линейная связность задает также уравнения параллельного переноса векторного поля вдоль данной кривой γ:

$$\frac{dv^i}{dt} + P^i_{jk} v^k \frac{du^j}{dt} = 0.$$

Перечислим все собственно геометрические полевые величины:
1) положительно определенное симметричное тензорное поле g_{ij};
2) векторное поле v^i;
3) линейная связность P^i_{jk};
4) скалярное поле и ковариантное векторное поле, антисимметричные ковариантные тензорные поля, которые могут быть представлены как 2^n-строка:

$$(a, a_i, a_{ij}, \ldots, a_{ijk\ldots l}).$$

Последующее развитие теории состоит в том, чтобы вывести уравнения для составляющих структурного поля. При работе со структурным полем нужно всегда иметь в виду, что природа не имеет дела с отдельными составляющими структурного поля, однако у нас есть возможность отвлекаться от единого целого и сосредоточиваться на его отдельных составляющих, чтобы в конечном итоге принять во внимание все то, что временно не учитывалось, и внести соответствующие дополнения и уточнения. Чтобы хорошо ориентироваться в потоке явлений, нам дана уникальная способность видеть физический мир в образах математического мира, как бы в чертежах. Задача состоит в том, чтобы воспользоваться этой замечательной возможностью и найти чертежи, чтобы реконструировать физический мир по-своему.

Понятие собственно геометрической полевой величины тесно связано с принципом минимальности гравитационных взаимодействий и через него с общим понятием потенциального поля. Принцип минимальности гравитационных взаимодействий означает, что лагранжианы физических полей, отличных от гравитационного поля, зависят только от значений гравитационного потенциала в точке, т. е. в лагранжианы физических полей не должны входить ковариантные производные. Определение потенциального поля будет дано в разделе, посвященном теории обобщенного электромагнитного поля.

Известно, что топологическое многообразие всегда допускает дифференциальную структуру, если его размерность не больше четырех и, следовательно, в случае общего положения $n = 1, 2, 3, 4$. Размерности три и четыре немедленно объединяются, поскольку физическое пространство естественно рассматривать как трехмерное дифференцируемое многообразие в статической теории физических полей и четырехмерное гладкое многообразие в динамической теории физических полей. С математической точки зрения переход от покоя к движению означает выход в дополнительное измерение. В размерности три тензор кривизны Римана является функцией тензора Риччи и скалярной кривизны, поэтому уравнения Эйнштейна чистой гравистатики имеют только тривиальное решение. Размерность два естественным образом объединяется с размерностью единица и три. Эти интересные с точки зрения голографического принципа и теории струн возможности здесь не рассматриваются, так как требуют отдельного изучения. Отметим также, что в размерности два тензор кривизны определяется скалярной кривизной.

Рассмотрим теперь механизм генерации физического многообразия, который каждому состоянию структурного поля ставит в соответствие гладкое многообразие. Абстрактное многообразие может быть реализовано как поверхность в евклидовом пространстве достаточно большого числа измерений. Общность при этом не теряется, поскольку класс абстрактных дифференцируемых многообразий не шире класса подмногообразий евклидовых пространств. Многомерное евклидово пространство R^n является линейной структурой на множестве n-строк (векторов)

$$\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n),$$

которая определяется естественными условиями

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x^1,\, \lambda x^2, \ldots, \lambda x^n),$$
$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n),$$

где λ есть действительное число, а x^a являются независимыми действительными переменными (координатами точек в R^n). Каждый вектор $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ соответствует определенному положению в R^n, которое допускает визуальное восприятие в размерностях $n = 1, 2, 3$. Функция расстояния дается обычным выражением

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \ldots + (x^n - y^n)^2}.$$

Из известной формулы $d^2(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d^2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - 2d(\mathbf{x}, \mathbf{y})d(\mathbf{x}, \mathbf{z})\cos\varphi$ легко находится алгебраическое представление как для $\cos\varphi$, так и для скалярного произведения

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = x^1 y^1 + \ldots + x^n y^n.$$

Область четырехмерного физического многообразия (как поверхности в объемлющем евклидовом пространстве некоторого достаточно большого числа измерений) аналитически определяется уравнениями погружения

$$x^a = F^a(u^1, u^2, u^3, u^4),$$

где функции $F^a(u^1, u^2, u^3, u^4)$ четырех независимых параметров u^1, u^2, u^3, u^4 (гауссовых координат) представляют собой решение характеристической системы нелинейных уравнений в частных производных

$$\delta_{ab}\frac{\partial F^a}{\partial u^i}\frac{\partial F^b}{\partial u^j} = g_{ij}(u^1, u^2, u^3, u^4), \quad a,\, b = 1, \ldots, 4 + k, \quad k \geqslant 0. \qquad (1)$$

Известные функции $g_{ij}(u^1, u^2, u^3, u^4)$ в правой стороне уравнений (1) представляют потенциал гравитационной составляющей структурного поля, удовлетворяющего уравнениям этого поля. Уравнения структурного поля выражают зависимость составляющих структурного поля друг от друга и, как показано, зная эту зависимость, можно каждому состоянию структурного поля поставить в соответствие свое физическое многообразие. Решением уравнений (1) оформляется физическое многообразие и одновременно фиксируется минимальная размерность объемлющего евклидова пространства. Особый статус гравитационного поля в теории структурного поля определяется репараметризационной инвариантностью и этой системой уравнений. Нужно отметить, что нельзя исключить из рассмотрения гравитационный потенциал g_{ij} как независимую величину и работать только с функциями $F^a(u^1, \ldots, u^4)$, так как в этом случае требуется заранее зафиксировать размерность объемлющего евклидова пространства, что противоречит гипотезе геометризации. Гравитационная составляющая структурного поля часто упоминается как положительно определенная квадратичная дифференциальная форма

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j. \tag{2}$$

Область трехмерного физического многообразия в теории структурного поля вне времени или в статике определяется совершенно аналогично. Таким образом, концепция физического многообразия охарактеризована достаточно полно. При рассмотрении концепции физического многообразия естественным образом возникает вопрос о том, согласуются ли топологические аспекты с гипотезой геометризации. В связи с этим отметим следующее. Одна из важных математических проблем была решена Григорием Перельманом с помощью дифференциальных уравнений, впервые введенных в топологию Ричардом Гамильтоном и названных потоками Риччи. С точки зрения общей квантовой механики эти уравнения устанавливают алгебраическую связь между импульсом гравитационного поля и тензором Риччи. Уравнения гравидинамики устанавливают связь между скоростью изменения импульса гравитационного поля со временем и тензором Риччи. Чтобы объединить геометрию, топологию и физику, предлагается использовать вместо потоков Риччи уравнения гравидинамики, вывод которых будет дан в последующем.

Полезно отметить, что физическое многообразие не определяет однозначно свое параметрическое представление. Параметры u^1, u^2, u^3, u^4 могут быть подвергнуты любому произвольному непрерывному преобразованию, которое представляет собой взаимно-однозначное отображение области изменения параметров на себя, что снова приводит к принципу репараметризационной инвариантности, согласно которому все утверждения теории должны быть инвариантны относительно репараметризации.

2. КОНЦЕПЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ

Принципы симметрии появились в физике в связи с открытием группы инвариантности уравнений Максвелла. С этим прецедентом симметрии приобрели важное эвристическое значение. Единственность и однозначность общей квантовой механики определяется в частности тем, что ее законы связаны с наиболее широкими группами преобразований. Репараметризационная инвариантность, как отмечалось выше, органически входит в структуру теории, однако ее недостаточно, чтобы однозначно представить все законы как одну общую структуру. Важными элементами такой структуры являются в геометрической теории фундаментальных взаимодействий собственно геометрические полевые величины и геометрическая внутренняя симметрия. Геометрическая внутренняя симметрия играет исключительную роль в теории спинового поля и обобщенного электромагнитного поля.

Определение геометрической внутренней симметрии. *Геометрические внутренние преобразования относятся только к собственно геометрическим полевым величинам. Подвергаясь преобразованию, собственно геометрическая полевая величина переходит в другую величину такого же типа, т. е. изменяется.* Геометрические внутренние преобразования касаются только функций поля и не затрагивают координат. Преобразования геометрической внутренней симметрии определяются только такими полевыми величинами, которые относятся к классу собственно геометрических полевых величин, определенному выше.

Физические группы геометрической внутренней симметрии оказываются в теории фундаментальных взаимодействий или максимально широкими, или содержащими только два элемента, что свидетельствует о наибольшей общности связанных с ними физических законов. Чтобы быть наблюдаемой, геометрическая внутренняя симметрия должна быть естественным образом нарушенной. Конкретизируем сказанное на примере геометрической внутренней симметрии, впервые введенной и изученной Вейлем. Вейль исследовал преобразование, при котором потенциал g_{ij} заменяется потенциалом $\overline{g}_{ij} = \lambda g_{ij}$, где λ есть произвольная положительная функция положения. Сравним репараметризационную инвариантность с группой преобразований Вейля. Ясно, что преобразование Вейля $\overline{g}_{ij} = \lambda g_{ij}$ индуцируется репараметризацией, если только

$$\widetilde{g}_{ij}(u) = g_{kl}(\theta(u))\theta^k_i(u)\theta^l_j(u) = \lambda(u)g_{ij}(u),$$

но эти уравнения имеют в общем случае только тривиальное решение. Согласно (1) g_{ij} и $\overline{g}_{ij} = \lambda g_{ij}$ будут оформлять, вообще говоря, различные физические многообразия. Это означает, что если рассматривать теорию, которая инвариантна относительно преобразований Вейля $\overline{g}_{ij} = \lambda g_{ij}$, то метрика g_{ij} теряет свое фундаментальное физическое и геометрическое значение, и поэтому геометрическая внутренняя симметрия Вейля должна быть нарушена, например, уравнениями для собственно геометрических полевых величин в теории Вейля. Рассмотрим эту ситуацию более детально, чтобы придать точный и конкретный смысл нашему последнему утверждению. Пусть

$$W^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}, \quad T^i_{jk} = \delta^i_j \phi_k + \delta^i_k \phi_j - g_{jk}\phi^i$$

есть связность Вейля, в которой Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля метрики g_{ij}. Для тензора Римана $B_{ijk}{}^l$ связности Вейля получаем такое выражение:

$$B_{ijk}{}^l = R_{ijk}{}^l + \nabla_i T^l_{jk} - \nabla_j T^l_{ik} + T^l_{im} T^m_{jk} - T^l_{jm} T^m_{ik},$$

где $R_{ijk}{}^l$ есть тензор кривизны, а ∇_i — ковариантная производная по отношению к связности Γ^i_{jk}. Поскольку связность Вейля W^i_{jk} инвариантна по отношению к преобразованиям, при которых ϕ_i, g_{ij} замещаются на

$$\phi_i - \frac{1}{\lambda}\partial_i \lambda, \quad \lambda g_{ij}$$

соответственно, то тензор $B_{ijk}{}^l$ также является инвариантом и, следовательно, то же самое имеет место для тензоров

$$B_{jk} = B_{ljk}{}^l = R_{jk} + \nabla_l T^l_{jk} - \nabla_j T^l_{lk} + T^l_{lm} T^m_{jk} - T^l_{jm} T^m_{lk}$$

и

$$H_{ij} = B_{ijl}{}^l = n(\nabla_i \phi_j - \nabla_j \phi_i),$$

где R_{jk} есть тензор Риччи. Поскольку желательно получить для ϕ_i, g_{ij} дифференциальные уравнения второго порядка, то нарушение геометрической внутренней симметрии Вейля становится очень естественным. Полагая

$$B = g^{jk} B_{jk} = R - (n-1)(n-2)\phi_l \phi^l + \nabla_l S^l, \quad S^l = T^l_{jk} g^{jk} - T^m_{mk} g^{kl},$$

мы видим, что введенная Вейлем калибровочная инвариантность, будучи нарушенной, оставляет след в виде уравнений Эйнштейна для гравитацитационного поля и уравнений массивного векторного поля. Эти уравнения могут быть выведены из геометрического лагранжиана $L = aB + bH_{ij}H^{ij}$ с постоянными a и b.

Главная задача общей квантовой механики состоит тогда в том, чтобы найти и исследовать конкретные естественные реализации общей концепции геометрической внутренней симметрии и затем установить полную систему фундаментальных уравнений, согласованную с этой симметрией. Предполагается, что каждому взаимодействию соответствует своя локальная внутренняя симметрия, что подчеркивает фундаментальное значение внутренней симметрии.

3. КОНЦЕПЦИЯ ТЕМПОРАЛЬНОГО ПОЛЯ И ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ

Построение общековариантной динамической теории структурного поля невозможно без решения проблемы времени, позволяющего связать геометрию с динамикой. Ответ на вопрос о том, какого рода время входит в конструкцию единого физического мира, дает гипотеза геометризации: понятие физического многообразия во всем и все в понятии физического многообразия. В этом разделе дана точная математическая формулировка основных свойств времени, раскрывающих его сущность и значение как ключа к пониманию общей структуры единой физики.

Поле времени есть скалярное поле, которое в системе координат u^1, u^2, u^3, u^4 области U физического многообразия обозначается

$$f(u) = f(u^1, u^2, u^3, u^4).$$

Скалярный характер поля времени впервые был обнаружен при выводе общековариантных уравнений Максвелла для электрического и магнитного полей и был связан с условием, чтобы эти уравнения выглядели как можно проще. Пространственное сечение физического многообразия определяется темпоральным полем как поверхность уровня функции $f(u^1, u^2, u^3, u^4)$. Для действительного числа t пространственное сечение дается уравнением

$$f(u^1, u^2, u^3, u^4) = t. \tag{3}$$

Так как темпоральное поле суть скалярное поле, его частные производные определяют ковекторное поле $t_i = \partial_i f$, которое называется градиентом темпорального поля или потоком времени. Градиент темпорального поля определяет направление быстрейшего возрастания (убывания) темпорального поля.

Потоком времени определяется фундаментальное понятие скорости изменения со временем некоторой величины как производной Ли или ковариантной производной в направлении потока времени. Эти производные определяются контравариантными компонентами потока времени

$$t^i = (\nabla f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^j} = g^{ij} \partial_j f = g^{ij} t_j,$$

где g^{ij} — это контравариантные компоненты потенциала гравитационного поля (2). Символы $D_{\mathtt{t}}$ и $\nabla_{\mathtt{t}} = t^i \nabla_i$ обозначают эти операции, где ∇_i есть ковариантная производная, принадлежащая гравитационному потенциалу g_{ij}.

Скорость изменения со временем самого темпорального поля дается формулой $D_{\mathtt{t}} f = \nabla_{\mathtt{t}} f = t^i \partial_i f = g^{ij} \partial_i f \, \partial_j f$. Темпоральное поле подчиняется фундаментальному уравнению

$$D_{\mathbf{t}} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^j} = 1, \tag{4}$$

выражающему тот факт, что время течет равномерно, т. е. с постоянной скоростью. Основное уравнение поля времени имеет общее решение, которое зависит от четырех параметров (в размерности четыре), и специальное решение, которое является функцией геодезического расстояния. Построение функции геодезического расстояния приведено в [1]. Если физическое многообразие есть евклидово пространство, то общее решение уравнения (3) будет давать пространственные сечения в виде плоскостей, а специальное решение будет давать сферы. Кривизна пространственного сечения в первом случае будет равна нулю, тогда как во втором случае кривизна пространственного сечения будет обратно пропорциональна квадрату радиуса сферы. Пространственная кривизна Вселенной мала, поэтому естественно принять, что на больших масштабах важную роль играет причинная структура, определяемая общим решением уравнения поля времени. Тогда как на относительно малых расстояниях главную роль играет причинная структура, определяемая особым решением.

Скорость изменения со временем гравитационного потенциала g_{ij} дается выражением

$$D_{\mathbf{t}} g_{ij} = t^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + g_{kj} \frac{\partial t^k}{\partial u^i} + g_{ik} \frac{\partial t^k}{\partial u^j}.$$

Для антисимметричного ковариантного тензорного поля $a_{ij\ldots k}$ имеем

$$D_{\mathbf{t}} a_{ij\ldots l} = t^k \partial_k a_{ij\ldots l} + p a_{k[j\ldots l} \partial_{i]} t^k.$$

Подобные формулы будут предъявлены и для других собственно геометрических полевых величин при дедуктивном выводе основных уравнений общей квантовой механики.

Оператор $\nabla_{\mathbf{t}}$ не имеет смысла применять к потенциалам гравитационного и общего электромагнитного полей, так как $\nabla_{\mathbf{t}} g_{ij} = 0$ тождественно, а потенциал обобщенного электромагнитного поля сам по себе есть линейная связность. Как оказалось, оператор $\nabla_{\mathbf{t}}$ возникает в спиндинамике.

Поток времени позволяет определить в геометрической, координатно-независимой форме следующие фундаментальные дискретные симметрии: обращение времени и двухстороннюю или билатеральную симметрию. В геометрической форме инвариантность относительно обращения времени означает, что теория инвариантна относительно преобразования

$$T: \; t^i \to -t^i.$$

Ясно, что теория будет инвариантна относительно обращения времени, если градиент темпорального поля будет входить во все формулы четное число раз, подобно $t^i t^j$. Как будет показано, один из лагранжианов спиндинамики не инвариантен относительно обращения времени. Данное определение операции обращения времени требует некоторых пояснений с точки зрения принципа соответствия. Определение и свойства естественной системы координат x^1, x^2, x^3, t будут даны ниже. В естественных координатах для поля времени имеем $f(x^1, x^2, x^3, t) = t$, а поток времени принимает совсем простой вид: $t^i = (0, 0, 0, 1)$. Таким образом, в естественных координатах скорость изменения со временем любого поля просто равна частной производной по переменной t, т. е. $D_t = \partial/\partial t$ (для примера можно взять формулу скорости изменения со временем гравитационного потенциала, данную выше). Если мы обратим время, полагая $\tilde{t}^i = -t^i$, то линии времени параметризуются новой переменной $\tilde{t}$. Нетрудно показать, что имеется взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное соответствие между параметрами t и $\tilde{t}$, даваемое соотношением $\widetilde{t} = -t$. Отсюда ясно, что в системе координат, определяемой обращенным временем, переменная $-t$ будет играть роль координаты времени. Таким образом, геометрическое определение обращения времени согласуется с известным определением операции обращения времени, связанным с преобразованием координат.

Дадим теперь определение билатеральной симметрии. Пара векторных полей $\mathbf{v}$ и $\overline{\mathbf{v}}$ обладает двухсторонней симметрией по отношению к потоку времени, если сумма этих полей коллинеарна градиенту темпорального поля, а их разность ортогональна ему,

$$\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v} = \lambda \mathbf{t}, \quad (\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{t}) = (\mathbf{v}, \mathbf{t}),$$

где $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_{ij} v^i w^j = v^i w_i$ есть скалярное произведение. В компонентах имеем

$$\overline{v}^i + v^i = \lambda t^i, \quad (\overline{v}^i - v^i) t_i = 0$$

и, следовательно,

$$\overline{v}^i = 2(\mathbf{v}, \mathbf{n})\, n^i - v^i = (2n^i n_j - \delta^i_j) v^j, \quad v^i = (2n^i n_j - \delta^i_j)\overline{v}^j, \quad n^i = \frac{t^i}{\sqrt{(\mathbf{t}, \mathbf{t})}}.$$

При выводе уравнений гравитационного поля необходимо рассматривать уравнение (4) как связь, и именно по этой причине введено в рассмотрение векторное поле n^i. Если векторное поле v^i назвать правым, то векторное поле $\overline{v}^i$ будет левым. Выбор, какое векторное поле является правым, а какое левым, делается произвольно. Если данное векторное поле ортогонально полю времени, $(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = 0$, то его зеркальный двойник отличается от него только направлением $\overline{v}^i = -v^i$. Симметрия правого и левого состоит в рассматриваемом случае в том, что замена правого поля на левое и левого поля на правое не приводит к наблюдаемым эффектам. Всякое векторное поле выступает в паре с векторным полем, ему зеркально симметричным. Процесс нахождения для каждого векторного поля зеркальной ему пары может быть представлен в форме линейного преобразования $\overline{v}^i = R^i_j v^j$, где

$$R^i_j = 2n^i n_j - \delta^i_j, \quad R^i_k R^k_j = \delta^i_j \quad \mathrm{Det}\,(R^i_j) = -1.$$

Это преобразование естественно назвать отражением. Таким образом, для других собственно геометрических полевых величин нахождение их зеркальных двойников может быть реализовано как представление операции отражения. Так как $\overline{v}^i = R^i_j v^j$, отсюда получаем $\overline{g}_{ij} = g_{kl} R^k_i R^l_j = g_{ij}$, и, следовательно, гравитационный потенциал g_{ij} инвариантен относительно отражения. То же самое справедливо и для потока времени. Скалярное произведение инвариантно по отношению к отражению. Действительно, $(\overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$, так как метрика g_{ij} инвариантна по отношению к отражению.

Важный вывод состоит в том, что с полем времени тесно связаны не только движение и изменение, которые приобретают абсолютный характер и адекватное математическое представление, но также и понятие правого и левого. Равносильность правого и левого является в теории фундаментальных взаимодействий краеугольным принципом, определяющим причинность. Конкретно это означает, что всякая величина всегда выступает в паре с зеркально симметричной ей величиной.

Билатеральная симметрия определяет причинность как ассоциированное скалярное произведение, которое имеет вид

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{w}).$$

Нетрудно показать, что ассоциированное скалярное произведение инвариантно относительно отражения: $\langle \overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{w}} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Рассмотрим физический смысл ассоциированного скалярного произведения $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Так как

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = (\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) = 2(\mathbf{v}, \mathbf{n})^2 - (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^2 (2\cos^2\varphi - 1) = |\mathbf{v}|^2 \cos 2\varphi,$$

где φ есть угол между векторами v^i и t^i, то ассоциированное скалярное произведение является индефинитным и может быть положительным, отрицательным или равным нулю в зависимости от значения угла φ. В частности, $(\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) = 0$, если $\varphi = \pi/4$. Таким образом, ассоциированное скалярное произведение $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ инвариантно относительно обращения времени и позволяет классифицировать все векторы в зависимости от того, какой угол они составляют по отношению к потоку времени. Как видно из формулы $(\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) = \overline{g}_{ij} v^i v^j$, где

$$\overline{g}_{ij} = 2n_i n_j - g_{ij} = g_{ik} R^k_j, \tag{5}$$

ассоциированное скалярное произведение может быть формализовано с помощью вспомогательной метрики $\overline{g}_{ij}$ как метрики нормального гиперболического типа, определяемой темпоральным полем и двухсторонней симметрией. Эта псевдориманова метрика дает конкретное содержание слову причинность. Контравариантные компоненты тензорного поля $\overline{g}_{ij}$ даются выражением $\overline{g}^{ij} = 2n^i n^j - g^{ij}$. Для полной ясности рассмотрим вопрос о природе и происхождении псевдоримановых метрик в самом общем виде. Псевдориманова метрика характеризуется квадратичной формой

$$\overline{\varphi} = \overline{g}_{ij} v^i v^j,$$

которая не является положительно определенной. Пусть

$$\varphi = g_{ij} v^i v^j$$

есть положительно определенная квадратичная форма. Тогда тензор $\overline{g}_{ij}$ может быть представлен следующим образом: $\overline{g}_{ij} = g_{ik} S^k_j$, где тензорное поле S^k_j представляет самосопряженный линейный оператор относительно обычного скалярного произведения. Отсюда получаем

$$\overline{\varphi} = \overline{g}_{ij} v^i v^j = g_{ik} v^i v^j S^k_j = g_{ik} v^i w^k,$$

где $w^k = v^j S^k_j$. Очевидно, что псевдориманова квадратичная форма имеет геометрический смысл угла между двумя направлениями по отношению к истинно римановой положительно определенной метрике. Физический смысл самосопряженного оператора S^i_j, как показано выше, имеет прямое отношение к природе времени и двухсторонней симметрии. Следовательно, двухсторонняя симметрия определяет естественную причинную структуру в виде псевдоримановой метрики лоренцевой сигнатуры и может быть отождествлена с ней. Таким образом, природа и происхождение метрики лоренцевой сигнатуры установлены.

В общей квантовой механике гравитации ставится в соответствие положительно определенное невырожденное симметричное тензорное поле второго ранга, которое упоминается как потенциал гравитационнного поля. Компоненты гравитационного потенциала обозначаются g_{ij}. Данное определение гравитационного потенциала есть то новое, что общая квантовая механика изначально вносит в теорию гравитационного поля. В последующем будет доказано, что так определенное гравитационное поле переносит энергию и импульс, т. е. представляет собой физическое поле. Энергия гравитационного поля и вектор потока энергии гравитационного поля определяются при этом однозначно. Простейший переход от статики к динамике может быть реализован как увеличение размерности физического пространства с заменой положительно определенной римановой метрики причинной структурой или вспомогательной метрикой (5). Таким образом, двухсторонняя симметрия дает однозначный способ введения темпорального поля (причинной структуры) в лагранжианы общей квантовой механики.

Геометрическая форма динамических уравнений гравитационного поля закодирована в лагранжиане $L = \overline{R}$, где $\overline{R}$ есть скаляр, который строится из вспомогательной метрики (5) по известным формулам римановой геометрии. Так как вспомогательная метрика (5) определяется двумя полями, связанными уравнением (4), то на это необходимо обратить особое внимание при выводе уравнений гравитационного поля. Стандартный метод состоит в том, чтобы ввести связь (4) с помощью множителя Лагранжа $\varepsilon = \varepsilon(u)$, переписать действие для гравитационного поля в виде $L_g = \overline{R}+\varepsilon(g^{ij}t_it_j-1)$ и рассматривать компоненты g_{ij} и f как независимые переменные. Можно пойти по другому пути: при варьировании g^{ij} накладывать на вариации условие $\delta g^{ij}t_it_j = 0$, а при варьировании f накладывать на вариации условие $t^i\partial_i\delta f = 0$. Таким образом, необходимо варьировать действие

$$A = \frac{1}{2}\int \overline{R}\sqrt{g}\,d^4u + \int L_m(\overline{g}, F)\sqrt{g}\,d^4u + \frac{1}{2}\int \varepsilon\,(g^{ij}t_it_j - 1)\sqrt{g}\,d^4u, \quad (6)$$

где $g = \mathrm{Det}\,(g_{ij}) > 0$ и $L_m(\overline{g}, F)$ есть лагранжева плотность других физических полей F, которая включает время через вспомогательную метрику (5) в подходящей форме (лагранжиан $L_m(\overline{g}, F)$ зависит только от значений $\overline{g}_{ij}$ в точке). Это очень важное условие, так как при этом предполагается минимальное взаимодействие динамических полей с гравитацией. Концепция потенциального поля, которая будет введена в четвертом сообщении, служит точной реализацией этого принципа. Как оказалось, концепция потенциального поля и концепция собственно геометрической полевой величины очерчивают фактически одно и то же множество геометрических полевых величин. Метод введения причинности с помощью вспомогательной метрики (5) или зеркальной симметрии является однозначным, но при этом не очевидно, как вывести динамические законы, если они записаны в геометрической форме. Эта задача будет решена здесь для случая гравидинамики. На первом этапе наша стратегия состоит в том, чтобы вывести уравнения гравитационного поля в геометрической форме, наиболее близкой к форме уравнений Эйнштейна для псевдоримановой метрики лоренцевой сигнатуры общего вида. Только затем будет введен импульс гравитационного поля и дан вывод уравнений гравидинамики. В заключение этого раздела приведем все основные свойства времени отдельной строкой.

Внутреннее время — это скалярное поле, носитель фундаментальной внутренней симметрии

$$f(u^1, u^2, u^3, u^4) \to f(u^1, u^2, u^3, u^4) + a,$$

где a есть постоянная. Инвариантность всех физических величин относительно преобразований

$$f(u^1, u^2, u^3, u^4) \to f(u^1, u^2, u^3, u^4) + a$$

определяет симметрию, которая приводит к наиболее общей форме закона сохранения энергии.

Градиент поля времени определяет длительность в виде криволинейного интеграла между двумя точками физического пространства

$$t_i = \partial_i f(u), \quad t_{pq} = f(q) - f(p) = \int\limits_p^q t_i du^i.$$

Векторное поле $t^i = g^{ij} t_j$ позволяет поставить в соответствие потоку времени линейный дифференциальный оператор

$$D_{\mathbf{t}} = t^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

и в конечном итоге определить скорость изменения всех физических полевых величин со временем, в том числе и скорость изменения самого поля времени.

Поток времени определяет дискретную внутреннюю симметрию, называемую двухсторонней симметрией, которая задает причинную структуру в теории поля и, как будет показано в последующем, одно из представлений этой симметрии определяет оператор электрического заряда.

Основное уравнение поля времени (3) имеет два качественно различных решения, что означает существование в мире двух различных причинных структур. Существование второй причинной структуры можно интерпретировать как нарушение инвариантности относительно преобразований Лоренца. Поток работ, посвященный этой теме, в последнее время стремительно нарастает и может быть направлен в нужное русло. После введения естественной системы координат будет дан конкретный пример решения уравнения темпорального поля, который раскрывает суть теории специальной относительности и демонстрирует вторую причинную структуру.

4. УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

В теории фундаментальных взаимодействий закон сохранения энергии означает, что равна нулю скорость изменения со временем суммарной плотности энергии гравитационного поля и всех других физических полей. Следовательно, плотность энергии является первым интегралом рассматриваемой полной системы полей. Чтобы доказать это важное утверждение, необходимо прежде вывести уравнения гравидинамики из действия (6).

Так как вспомогательная метрика (5) является функцией g_{ij} и f, то удобно использовать цепное правило. Имеем $\delta\overline{R} = \overline{g}^{ij}\delta\overline{R}_{ij} + \overline{R}_{ij}\delta\overline{g}^{ij}$. Далее обозначаем Γ^i_{jk}, $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ символы Кристоффеля, принадлежащие соответственно g_{ij} и $\overline{g}_{ij}$. Из (5) после некоторых вычислений получаем

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + H^i_{jk}, \tag{7}$$

где

$$H^i_{jk} = n^i(\nabla_j n_k + \nabla_k n_j) + (2n^i n^l - g^{il})(n_j\delta^m_k + n_k\delta^m_j)(\nabla_m n_l - \nabla_l n_m).$$

В последней формуле ∇_j есть ковариантная производная по отношению к связности Γ^i_{jk}. Из (7) легко вывести, что $\overline{\Gamma}^j_{jk} = \Gamma^j_{jk}$, и, следовательно, $\overline{g}^{ij}\delta\overline{R}_{ij}$ может быть опущена как полная производная. Варьируя $\overline{g}^{ij}$, получаем

$$\delta\overline{g}^{ij} = \delta g^{ij} + P^{ij}_{kl}\delta g^{kl} + Q^{ijk}\partial_k\delta f,$$

где

$$P^{ij}_{kl} = 2n^i n^j n_k n_l - n^i(n_k\delta^j_l + n_l\delta^j_k) - n^j(n_k\delta^i_l + n_l\delta^i_k),$$
$$Q^{ijk} = \frac{2}{\sqrt{(t,t)}}(2n^i n^j n^k - n^i g^{jk} - n^j g^{ik}).$$

Тензорное поле P^{ij}_{kl} является симметричным относительно ковариантных и контравариантных индексов.

Пусть

$$\overline{G}_{ij} = \overline{R}_{ij} - \frac{1}{2}\overline{g}_{ij}\overline{R}$$

есть тензор Эйнштейна вспомогательной метрики. Далее полагаем $\delta L_F = \dfrac{1}{2}M_{ij}\delta\overline{g}^{ij}$ и вводим стандартным путем тензор энергии-импульса

$$T_{ij} = M_{ij} - \overline{g}_{ij}L_F.$$

Замечая, что

$$\overline{g}_{ij} + \overline{g}_{kl}P^{kl}_{ij} = g_{ij}, \quad g_{ij}Q^{ijk} = n_i n_j Q^{ijk} = 0,$$

легко убедиться, что полная вариация действия (если опустить полные производные) может быть записана в следующем виде:

$$\delta A = \frac{1}{2}\int \left(A_{ij}\delta g^{ij} + B\delta f + \delta\varepsilon\left(g^{ij}t_i t_j - 1\right)\right)\sqrt{g}d^4u, \tag{8}$$

где

$$A_{ij} = G_{ij} + G_{kl}P^{kl}_{ij} + T_{ij} + T_{kl}P^{kl}_{ij} + \varepsilon\, t_i t_j - \frac{1}{2}\varepsilon\,(g^{kl}t_k t_l - 1)g_{ij},$$

$$B = -\nabla_k\left((G_{ij} + T_{ij} - \varepsilon t_i t_j)Q^{ijk}\right) - 2\nabla_k(\varepsilon t^k).$$

Тензор P^{kl}_{ij} можно рассматривать как оператор, действующий в пространстве симметричных тензорных полей. Характеристическое уравнение этого оператора имеет вид $P^2 + 2P = 0$ и, следовательно, $(P+1)^2 = 1$. Таким образом, оператор $P+1$ и ему обратный совпадают. Так как $t_i t_j + t_k t_l P^{kl}_{ij} = -t_i t_j$, из (8) следует, что уравнения гравидинамики имеют вид

$$G_{ij} + T_{ij} = \varepsilon \partial_i f\, \partial_j f, \quad g^{ij}\partial_i f\, \partial_j f = 1, \tag{9}$$

$$\nabla_k(\varepsilon t^k) = 0. \tag{10}$$

Таким образом, из гипотезы геометризации вытекает полная система уравнений гравитационного поля (9), которая представлена здесь в геометрической форме. Уравнение (10) выражает общековариантный закон сохранения энергии в общей квантовой механике. Чтобы убедиться, что мы действительно имеем дело с законом сохранения энергии, достаточно понять, что действие (6) инвариантно относительно преобразований $f \to f + a$, где a — постоянная. Таким образом, уравнение (10) выводится также из теоремы Нетер как следствие универсальной симметрии, связанной с независимостью всех величин теории от выбора пространственного сечения физического многообразия. Ясно, что множитель Лагранжа ε имеет физический смысл плотности энергии рассматриваемой физической системы. Из (9) следует, что

$$\varepsilon = G_{ij}t^i t^j + T_{ij}t^i t^j = \varepsilon_g + \varepsilon_m, \tag{11}$$

где $\varepsilon_g = G_{ij}t^i t^j = \dfrac{1}{2}\overline{R}_{ij}g^{ij}$ — плотность энергии гравитационного поля и $\varepsilon_m = T_{ij}t^i t^j$ — плотность энергии других физических полей. Рассмотрим закон сохранения энергии с различных точек зрения. Прежде всего рассмотрим связь между уравнениями (9) и (10). Так называемый локальный закон сохранения энергии записывается следующим образом: $\overline{\nabla}_i T^{ij} = 0$, где $T^{ij} = T_{kl}\overline{g}^{ik}\overline{g}^{jl}$ и $\overline{\nabla}_i$ есть ковариантная производная по отношению к $\overline{\Gamma}^i_{jk}$. Эти уравнения выполняются на решениях уравнений для полей F, дающих вклад в тензор энергии-импульса. Так как $\overline{\nabla}_i G^{ij} = 0$ тождественно, то из уравнений (9) следует, что

$$\overline{\nabla}_i T^{ij} = \varepsilon t^i(\overline{\nabla}_i t^j) + t^j \overline{\nabla}_i(\varepsilon t^i).$$

Из (4) и (7) следует, что $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + 2t^i\nabla_j t_k$, и в конечном итоге получаем

$$\overline{\nabla}_i T^{ij} = t^j \nabla_i(\varepsilon t^i).$$

Ввиду этого закон сохранения энергии можно трактовать как условие совместности уравнений гравидинамики. В этом смысле закон сохранения энергии вполне аналогичен закону сохранения заряда, а репараметризационная инвариантность аналогична калибровочной инвариантности.

Покажем, что скорость изменения со временем плотности энергии $D_t(\sqrt{g}\varepsilon)$ равна нулю и, следовательно, эта величина является первым интегралом. Имеем $D_t(\sqrt{g}\varepsilon) = t^i\partial_i(\sqrt{g}\varepsilon) + \sqrt{g}\varepsilon\partial_i t^i = \partial_i(\sqrt{g}\varepsilon t^i)$. Так как $\sqrt{g}\nabla_k(\varepsilon t^k) = \partial_i(\sqrt{g}\varepsilon t^i)$, из закона сохранения энергии (10) следует, что плотность энергии является первым интегралом

$$D_t(\sqrt{g}\varepsilon) = 0. \tag{12}$$

Дадим еще одну формулировку закона сохранения энергии. Пусть e_{ijkl} есть ориентация физического многообразия. Так как

$$D_{\mathbf{t}} e_{ijkl} = \varphi e_{ijkl},$$

то отсюда и из уравнения (10) следует, что закон сохранения энергии можно записать в следующей форме:

$$D_{\mathbf{t}}(\varepsilon e_{ijkl}) = 0.$$

Вводя ориентацию пространственного сечения уравнением

$$\eta_{ijk} = t^l e_{ijkl},$$

получаем еще одну форму закона сохранения энергии:

$$D_{\mathbf{t}}(\varepsilon\eta_{ijk}) = 0.$$

Отметим, наконец, что дифференциальная форма энергии $\omega = \varepsilon\eta_{ijk}du^i \wedge du^j \wedge du^k$ является замкнутой:

$$d\omega = 0.$$

В естественных координатах x^1, x^2, x^3, t, определенных ниже, $\mathbf{t} = (0, 0, 0, 1)$, и поэтому уравнение (12) приобретает более привычный вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{g}\varepsilon) = 0.$$

Сравним закон сохранения энергии с законом сохранения заряда, который в общековариантной форме может быть записан следующим образом: $\nabla_i J^i = 0$. Полагая $J^i = t^i(t, J) + J^i - t^i(t, J) = \rho t^i + P^i$, находим, что $D_t(\sqrt{g}\rho) + \partial_i(\sqrt{g}P^i) = 0$. Таким образом, в общем случае зарядовая плотность не является первым интегралом, в то время как плотность энергии всегда есть первый интеграл. Это фундаментальное отличие можно понять, если ввести новое общековариантное физическое понятие импульса гравитационного поля и вывести уравнения гравидинамики как уравнения для импульса гравитационного поля.

5. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ГРАВИДИНАМИКИ

Уравнения гравитационного поля представляют собой уравнения второго порядка, поэтому причинная структура этих уравнений может быть раскрыта, если их удастся записать как уравнения для импульса гравитационного поля. Нетривиальным моментом является определение импульса гравитационного поля. Здесь заранее ясно только одно, что импульс гравитационного поля связан со скоростью изменения со временем гравитационного потенциала. К цели ведет следующее определение. Тензорное поле типа (1,1)

$$P^i_j = \frac{1}{2} g^{ik} D_t g_{jk} = \frac{1}{2} g^{ik} (\nabla_j t_k + \nabla_k t_j) = g^{ik} \nabla_j t_k = \nabla_j t^i$$

называется импульсом гравитационного поля. Приведем наиболее важные характеристики импульса гравитационного поля. Соотношения

$$t_i P^i_j = 0, \quad t^j P^i_j = 0, \quad g^{ik} P^l_k g_{lj} = P^i_j$$

означают, что импульс является физической величиной и самосопряженным оператором. Уравнения

$$\nabla_i P^k_j - \nabla_j P^k_i = R_{ijl}{}^k t^l, \quad \nabla_k P^k_j - \nabla_j P^k_k = R_{kjl}{}^k t^l = R_{jl} t^l$$

устанавливают связь между импульсом гравитационного поля и тезорами Римана и Риччи гравитационного поля. Приведем также следующие формулы, куда входит импульс гравитационного поля:

$$D_t P^i_j = t^l \nabla_l P^i_j, \quad D_t \Gamma^i_{jk} = \nabla_j P^i_k + \nabla_k P^i_j - g^{il} g_{km} \nabla_l P^m_j,$$

$$D_t g = g g^{ik} D_t g_{ik} = 2 g P^i_i.$$

Выведем теперь уравнения гравидинамики как уравнения для импульса гравитационного поля, что позволяет ввести фундаментальное понятие вектора потока энергии гравитационного поля и представить плотность энергии гравитационного поля как сумму плотностей кинетической и потенциальной энергии этого поля. С этой целью представим сначала уравнения (9) в несколько иной форме, однако эквивалентной исходной. Сворачивая уравнения (9) с $\overline{g}^{ij}$ и полагая $T = T_{ij}\overline{g}^{ij}$, получим соотношение $\overline{R} = T - \varepsilon$, подставляя которое в исходное уравнение, придем к эквивалентному уравнению

$$\overline{R}_{ij} + T_{ij} - \frac{1}{2}\overline{g}_{ij} T = \frac{1}{2} g_{ij}\, \varepsilon. \tag{13}$$

Можно использовать (9) или (13) как основные уравнения. Положим

$$L_{ij} = \overline{R}_{ij} + T_{ij} - \frac{1}{2}\overline{g}_{ij} T, \quad L^i_j = g^{ik} L_{kj}.$$

Так как $\mathrm{Tr}L = 2\varepsilon$, то уравнения (13) можно записать в виде уравнения для самосопряженного оператора

$$L^i_j, \quad L^i_j = g^{im} L^k_m g_{kj},$$

$$L^i_j = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}\, L \delta^i_j. \tag{14}$$

Покажем, что уравнение (14) эквивалентно двум уравнениям

$$h^k_i L^i_j h^j_l = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}\, L h^k_l \tag{15}$$

и

$$t^j L^i_j h^k_i = 0, \tag{16}$$

где $h^i_j = \delta^i_j - t^i t_j$ есть проекционный оператор, $h^i_k h^k_j = h^i_j$. Из уравнения (14) легко вывести уравнения (15) и (16). Выведем из (15) и (16) уравнение (14). Сворачивая по индексам k и l, получаем из (15)

$$t_i L^i_j t^j = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}\, L. \tag{17}$$

Докажем, что

$$t_i L^i_l = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}\, L t_l.$$

Запишем уравнение (16) в виде

$$t^j L^k_j = t^j L^i t_i t^k.$$

Так как $L^k_j = g^{km} L^n_m g_{nj}$, то после подстановки в последнее соотношение выводим последовательно

$$t^j g^{km} L^n_m g_{nj} = t^j g^{im} L^n_m g_{nj} t_i t^k, \quad g^{km} L^n_m t_n = t^m L^n_m t_n t^k.$$

Отсюда, учитывая (17), получаем искомое равенство. С использованием доказанного соотношения из (15) и (16) легко выводится уравнение (14).

Следующая задача состоит в том, чтобы в приведенном выше выражении для энергии гравитационного поля отделить потенциальную и кинетическую энергию и записать уравнения гравитационного поля как уравнения для импульса этого поля, которые показывают, как скорость изменения импульса гравитационного поля выражается через другие характеристики самого гравитационного поля и других физических полей. Физическим тензором кривизны гравитационного поля назовем тензор S^l_{ijk}, который не содержит компонент импульса гравитационного поля. Из приведенных выше соотношений для импульса гравитационного поля следует, что тензор кривизны R^l_{ijk} содержит компоненты импульса. Это же относится и к напряженности гравитационного поля. Для нахождения физического тензора кривизны построим прежде связность, которая не содержит компонент импульса. Введем симметричное по нижним индексам тензорное поле

$$T^i_{jk} = t^i \nabla_j t_k - t_j \nabla_k t^i - t_k \nabla_j t^i.$$

Новая связность

$$\widetilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}$$

удовлетворяет поставленным условиям. Действительно, если $\widetilde{\nabla}_i$ есть ковариантная производная в связности $\widetilde{\Gamma} = \Gamma + T$, то выполняются соотношения

$$\widetilde{\nabla}_i t^j = 0, \quad \widetilde{\nabla}_i t_j = 0, \quad \widetilde{\nabla}_i g_{jk} = t_i D_{\mathbf{t}} g_{jk}, \quad \widetilde{\nabla}_{\mathbf{t}} g_{jk} = D_{\mathbf{t}} g_{jk}.$$

Тензор кривизны связности $\widetilde{\Gamma}$ обозначим $\widetilde{R}_{ijk}{}^l$. Для этого тензора получаем следующее выражение:

$$\widetilde{R}_{ijk}{}^l = R_{ijk}{}^l + \nabla_i T^l_{jk} - \nabla_j T^l_{ik} + T^l_{im} T^m_{jk} - T^l_{jm} T^m_{ik}.$$

Так как

$$\widetilde{\nabla}_i \widetilde{\nabla}_j t^l - \widetilde{\nabla}_j \widetilde{\nabla}_i t^l = t^k \widetilde{R}_{ijk}{}^l, \quad \widetilde{\nabla}_i \widetilde{\nabla}_j t_k - \widetilde{\nabla}_j \widetilde{\nabla}_i t_k = t_l \widetilde{R}_{ijk}{}^l,$$

то

$$t^k \widetilde{R}_{ijk}{}^l = 0, \quad t_l \widetilde{R}_{ijk}{}^l = 0.$$

Однако это еще не решает окончательно задачу нахождения физического тензора кривизны, поскольку для рассматриваемого тензора не выполняется уравнение $t^i \widetilde{R}_{ijk}{}^l = 0$ и, кроме того, его тензор Риччи не является симметричным, так как для

$$\widetilde{R}_{jk} = \widetilde{R}_{ljk}{}^l$$

$$\widetilde{R}_{jk} - \widetilde{R}_{kj} = t_k \nabla_j \varphi - t_j \nabla_k \varphi, \quad \varphi = \nabla_l t^l.$$

Для физического тензора кривизны получаем следующее представление:

$$S_{ijk}{}^l = \widetilde{R}_{ijk}{}^l + t_i t^m \widetilde{R}_{jmk}{}^l - t_j t^m \widetilde{R}_{imk}{}^l.$$

Для $S_{ijk}{}^l$ справедливо тождество

$$S_{ijk}{}^l + S_{jki}{}^l + S_{kij}{}^l = 0.$$

Отсюда следует, что тензор Риччи $S_{jk} = S_{ljk}{}^l$ симметричен, так как $S_{ijl}{}^l = 0$. Для смешанных компонент получаем

$$S^i_j = h^i_k R^k_l h^l_j + D_{\mathbf{t}} P^i_j + \varphi P^i_j. \tag{18}$$

Тензор S^i_j упоминается как тензор напряжений гравитационного поля. Для скалярной кривизны гравитационного поля получаем отсюда следующее представление:

$$S = TrS = R + 2D_{\mathbf{t}}\varphi + \varphi^2 + P^i_j P^j_i. \tag{19}$$

Из (4) и (7) находим

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} + \nabla_l(t^l D_t g_{ij})$$

и, следовательно,

$$g^{ik}\overline{R}_{jk} = R^i_j + 2D_t P^i_j + 2\varphi P^i_j.$$

Теперь есть все необходимое, чтобы структурировать аморфное представление энергии гравитационного поля и записать плотность энергии гравитационного поля как сумму плотности кинетической энергии и плотности потенциальной энергии. Из последней формулы следует, что

$$\varepsilon_{\mathbf{g}} = \frac{1}{2}R + \varphi^2 + t^l\nabla_l\varphi.$$

Согласно (18)

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}R + \varphi^2 + t^l\nabla_l\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}P^i_j P^j_i.$$

Отсюда находим, что плотность энергии гравитационного поля имеет следующую структуру:

$$\varepsilon_{\mathbf{g}} = \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}P^i_j P^j_i + \frac{1}{2}S = T + U,$$

где

$$T = \frac{1}{2}(P^i_i)^2 - \frac{1}{2}P^i_j P^j_i = \frac{1}{2}(TrP)^2 - \frac{1}{2}Tr(P^2) \tag{20}$$

есть плотность кинетической энергии и

$$U = \frac{1}{2}S \tag{21}$$

есть плотность потенциальной энергии гравитационного поля.

Как известно, в классической механике функция Лагранжа равна разности кинетической и потенциальной энергии. Рассмотрим с этой точки зрения лагранжиан гравитационного поля. Так как

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} + 2\varphi\nabla_j t_k + 2t^l\nabla_l\nabla_j t_k, \quad \nabla_l t^k\nabla_j t_k + t^k\nabla_l\nabla_j t_k = 0,$$

то

$$\frac{1}{2}\overline{R} = \frac{1}{2}\overline{g}^{jk}\overline{R}_{jk} = t^j t^k R_{jk} - \varepsilon_g.$$

Имеем

$$t^j t^k R_{jk} = t^j(\nabla_l P^l_j - \nabla_j \varphi) = 2T - \nabla_j(\varphi t^j).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\overline{R} = T - U - \nabla_j(\varphi t^j).$$

Как видно, рассмотренный нами лагранжиан отличается от канонического на полную дивергенцию. Это является важным дополнительным свидетельством корректности данного выше определения импульса гравитационного поля и естественности введенных энергетических характеристик гравитационного поля. Как видно, полная энергия гравитационного поля является квадратичной функцией импульсов, что следует отметить в связи с проблемой квантования гравитационного поля.

Запишем уравнения (16) и (17) как уравнения для импульса гравитационного поля. Введем обобщенный максвелловский тензор напряжений физических полей, отличных от гравитационного поля:

$$N^i_j = h^i_k T^k_l h^l_j - \frac{1}{2} T h^i_j,$$

где $h^i_j = \delta^i_j - t^i t_j$ есть проекционный оператор, $h^i_k h^k_j = h^i_j$. Отсюда следует, что первая группа уравнений гравитационного поля имеет вид

$$D_{\mathbf{t}} P^i_j + \varphi P^i_j + S^i_j + N^i_j = \frac{1}{2}\varepsilon h^i_j. \tag{22}$$

Как видно из этой системы уравнений, скорость изменения импульса гравитационного поля со временем определяется тензором напряжений полной системы полей и ее плотностью энергии. Так как всякий динамический режим начинается с абсолютного покоя, то в начальном состоянии импульс гравитационного поля равен нулю.

Перейдем к рассмотрению второй группы уравнений гравитационного поля. Имеем

$$g^{ik}\overline{R}_{jk} t^j = R^i_j t^j = g^{ik}(\nabla_l P^l_k - \nabla_k P^l_l),$$

$$g^{il}(T_{jl} - \frac{1}{2}\overline{g}_{jl} T) t^j h^k_i = (g^{kl} - t^k t^l) T_{jl} t^j = g^{kl} T_{jl} t^j - \varepsilon_{\mathbf{m}} t^k.$$

Затем определяем вектор потока энергии гравитационного поля

$$\mathrm{G}_j = h^i_j(\nabla_l P^l_i - \partial_i P^l_l)$$

и вектор потока энергии других физических полей

$$\Pi_i = \varepsilon_{\mathbf{m}}\, t_i - T_{ik} t^k.$$

Очевидно, что $(\mathbf{t}, \mathbf{G}) = (\mathbf{t}, \mathbf{\Pi}) = 0$. Вторая группа уравнений гравитационного поля принимает вид

$$\mathrm{G}_i = \Pi_i. \tag{23}$$

Вторая группа уравнений гравитационного поля имеет очень простой физический смысл, означающий, что вектор потока гравитационной энергии в точности равен вектору потока энергии других физических полей. Отсюда понятно, почему суммарная плотность энергии всех физических полей составляет первый интеграл. Таким образом, поток гравитационной энергии течет в направлении, противоположном потоку других форм энергии, и в точности равен ему по величине. Как известно, солнце является удивительно мощным потоком лучистой энергии. Если будет обнаружен такой же поток гравитационной энергии, текущий по направлению к солнцу, то солнце можно рассматривать как преобразователь гравитационной энергии в электромагнитную энергию.

Запишем уравнения (20) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{g}} D_t(\sqrt{g} P^i_j) + S^i_j + N^i_j = \frac{1}{2} \varepsilon\, h^i_j$$

и отметим, что из (20) следует

$$\frac{1}{\sqrt{g}} D_t(\sqrt{g}(\mathrm{G}_i - \Pi_i)) = 0.$$

Последнее уравнение означает совместность первой и второй групп уравнений гравитационного поля. Аналогичное условие совместности содержится и в уравнениях Максвелла.

Теперь представляется уместным рассмотреть общековариантные динамические законы гравитационного поля в естественных координатах, определяемых потоком времени. Фундаментальное значение естественных координат состоит в следующем. Теория фундаментальных взаимодействий инвариантна относительно репараметризации. Поэтому полная система фундаментальных уравнений общей квантовой механики содержит функциональный произвол, и, прежде чем их решать, нужно избавиться от этого функционального произвола. Определяя естественные координаты, поток времени дает регулярное внутреннее решение этой задачи. Докажем, что в естественных координатах причинная структура (градиент темпорального поля) приобретает простейший вид $\mathbf{t} = (0, 0, 0, 1)$.

Геометрически поток времени определяется как конгруэнция кривых (линий времени) на многообразии. Аналитически линии времени находятся как решения автономной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{du^i}{dt} = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^j} = g^{ij} \partial_j f = (\nabla f)^i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{24}$$

Пусть
$$u^i(t) = \varphi^i(u_0^1,\, u_0^2,\, u_0^3,\, u_0^4, t) = \varphi^i(u_0, t) \tag{25}$$
есть решение уравнений (18) с начальными данными $\varphi^i(u_0, t_0) = u_0^i$. Подставляя $u^i(t) = \varphi^i(u_0, t)$ в функцию $f(u^1,\, u^2,\, u^3,\, u^4)$, получаем $p(t) = f(\varphi(u_0, t))$. С учетом (4) и (18) находим
$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt} = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{\partial f}{\partial u^j} = 1.$$
Это дает $f(\varphi(u_0, t)) = t - t_0 + f(u_0)$. Предположим, что все начальные данные принадлежат пространственному сечению $f(u_0^1,\, u_0^2,\, u_0^3,\, u_0^4) = t_0$. Если записать это соотношение в параметрической форме $u_0^i = \psi^i(x^1, x^2, x^3)$, то уравнения (19) могут быть записаны в следующем виде:
$$u^i = \phi^i(x^1, x^2, x^3, t). \tag{26}$$
Функции (20) имеют непрерывные частные производные по отношению к параметрам x^1, x^2, x^3, t, и их функциональный определитель не равен нулю. Так как в координатах x^1, x^2, x^3, t темпоральное поле имеет простой вид $f(x^1, x^2, x^3, t) = f(\phi(x, t)) = t$, то в этих координатах $t_i = \partial_i f = (0, 0, 0, 1)$. Так как координаты x^1, x^2, x^3 не изменяются вдоль линий времени, то
$$\frac{dx^\mu}{dt} = g^{\mu 4} = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, \quad \frac{dt}{dt} = g^{44} = 1.$$
Следовательно, функции $\phi^i(x^1, x^2, x^3, t)$ оформляют естественные координаты в общей квантовой механике. По отношению к естественным координатам
$$t_i = (0, 0, 0, 1), \quad g^{\mu 4} = 0, \quad g^{44} = 1, \quad t^i = g^{ij} t_j = g^{i4} = (0, 0, 0, 1),$$
что и требовалось доказать. В естественных координатах метрика (2) записывается в виде
$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^1,\, x^2,\, x^3,\, t)dx^\mu dx^\nu + (dt)^2, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, \tag{27}$$
поскольку $t_i = g_{ij} t^j = g_{i4}$. Эти общие рассуждения подкрепим изучением важного конкретного случая.

Рассмотрим в качестве физического многообразия четырехмерное евклидово пространство R^4, в котором выбраны и фиксированы декартовы координаты. Символ $\mathbf{u}$ обозначает вектор в R^4 с компонентами $(u^1,\, u^2,\, u^3,\, u^4)$; скалярное произведение и функция расстояния определяются, как обычно,
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 + u^4 v^4,$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})}, \quad d(\mathbf{u}, 0) = |\mathbf{u}|.$$

Причинная структура в R^4 задается метрикой $g_{ij} = \delta_{ij}$ и темпоральным полем $f(u^1,\, u^2,\, u^3,\, u^4)$, которое подчиняется уравнению

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u^4}\right)^2 = 1.$$

Это уравнение имеет решение $f(u^1, u^2, u^3, u^4) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}$, где $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3, a^4)$ есть постоянный нормированный вектор $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1$. Линии времени находятся в данном случае решением автономной системы уравнений

$$\frac{du^i}{dt} = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial u^j} = t^i = a^i.$$

Общее решение есть прямая линия, проходящая через фиксированную точку $\mathbf{u}_0$:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{a}(t - t_0) + \mathbf{u}_0.$$

Рассматриваемая причинная структура определяет в данном случае интервал следующим образом. Пусть

$$\mathbf{u}_a = 2\mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}) - \mathbf{u}$$

есть вектор, зеркально симметричный $\mathbf{u}$ по отношению к потоку времени $\mathbf{a}$. Тогда в координатах u^1, u^2, u^3, u^4 интервал может быть представлен следующим образом:

$$s^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_a = 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})^2 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2\cos 2\theta,$$

где θ есть угол между потоком времени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{u}$. Чтобы убедиться, что s есть действительно хорошо известный интервал, введем естественную систему координат, ассоциированную с рассматриваемой причинной структурой. С этой целью предположим, что все начальные данные конгруэнции линий времени принадлежат пространственному сечению

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_0 = t_0.$$

Чтобы решить это алгебраическое уравнение, введем систему ортогональных единичных векторов

$$\mathbf{E}_0 = (a^1,\, a^2,\, a^3,\, a^4), \quad \mathbf{E}_1 = (-a^4,\, -a^3,\, a^2,\, a^1),$$

$$\mathbf{E}_2 = (a^3,\, -a^4,\, -a^1,\, a^2), \quad \mathbf{E}_3 = (-a^2,\, a^1,\, -a^4,\, a^3),$$

$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}$. Тогда общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$\mathbf{u}_0 = t_0\mathbf{E}_0 + x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3,$$

где x, y, z есть декартовы координаты на рассматриваемом пространственном сечении. Для конгруэнции линий времени получаем с учетом этого следующее представление:

$$\mathbf{u}(t) = t\mathbf{E}_0 + x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3.$$

Нетрудно убедиться, что в координатах t, x, y, z интервал имеет знакомый вид:

$$s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Таким образом, сущность специальной теории относительности состоит не только в инвариантности относительно преобразований Лоренца, но и в том, что в рассматриваемом случае имеет место своеобразное вырождение. Вместо вектора $\mathbf{a}$ можно взять любой другой вектор $\mathbf{b}$, однако ясно, что физические результаты не должны зависеть от выбора направления потока времени. Этот важный момент требует особого рассмотрения, но мы на нем останавливаться не будем и перейдем к рассмотрению второй причинной структуры на физическом многообразии R^4.

Как было отмечено выше, вторая причинная структура определяется функцией геодезического расстояния. В данном случае она имеет вид

$$f(u^1, u^2, u^3, u^4) = \sqrt{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})} = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2}.$$

Нетрудно убедиться, что эта функция также удовлетворяет уравнению темпорального поля. В этом случае линии времени есть решения системы уравнений

$$\frac{du^i}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{u^i}{f} = \frac{u^i}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2}}.$$

Можно показать, что общее решение этой системы имеет вид

$$u^i(\tau) = u_0^i\frac{\tau}{\tau_0},$$

причем начальные данные принадлежат пространственному сечению

$$\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{u}_0 = {\tau_0}^2,$$

которое представляет собой трехмерную сферу радиусом τ_0. Таким образом, в рассматриваемой ситуации поток времени представляет собой конгруэнцию лучей, исходящих из одной точки $(0, 0, 0, 0)$. Вторая причинная структура может быть представлена псевдоримановой метрикой вида

$$\overline{g}_{ij} = 2\frac{u_i}{f}\frac{u_j}{f} - \delta_{ij}.$$

Отсюда следует, что действие для точечной частицы, нагруженной массой, имеет в случае второй причинной структуры следующий вид:

$$S = -mc \int_p^q \sqrt{1 - \tau^2 \omega^2} d\tau,$$

где $\omega = dl/d\tau$ и dl есть элемент длины на единичной трехмерной сфере. Действительно, $\mathbf{du} \cdot \mathbf{du} = d\tau^2 + \tau^2 dl^2$ и $\mathbf{u} \cdot \mathbf{du} = \tau d\tau$. Введем естественную систему координат для второй причинной структуры. Параметризуем пространственное сечение с помощью соотношений

$$u_0^1 = \tau_0 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma, \quad u_0^2 = \tau_0 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

$$u_0^3 = \tau_0 \sin\alpha \cos\beta, \quad u_0^4 = \tau_0 \cos\alpha,$$

где $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$. При такой параметризации конгруэнция линий времени запишется в виде

$$u_0^1 = \tau \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma, \quad u_0^2 = \tau \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

$$u_0^3 = \tau \sin\alpha \cos\beta, \quad u_0^4 = \tau \cos\alpha,$$

В координатах $(\tau,\, \alpha,\, \beta,\, \gamma)$ псевдориманова метрика имеет вид

$$d\overline{s}^2 = d\tau^2 - \tau^2 \big[d\alpha^2 + \sin^2\alpha \big(d\beta^2 + \sin^2\beta d\gamma^2 \big) \big],$$

и $\sqrt{-\overline{g}} = \tau^3 \sin^2\alpha \sin\beta$, а градиент темпорального поля имеет известные компоненты $t_i = (0,\, 0,\, 0,\, 1)$.

Таким образом, физическое многообразие в рассматриваемом случае расслаивается на параллельные плоскости и сферы.

В естественных координатах полевые уравнения имеют наиболее простой вид в том смысле, что все компоненты градиента темпорального поля и четыре компоненты гравитационного потенциала принимают простые числовые значения. Очень важное значение естественных координат подчеркивает также то обстоятельство, что они подобны координатам Дарбу в теории симплектических многообразий, составляющих геометрический базис гамильтоновой механики. Причинная структура общей квантовой механики аналогична симплектической структуре гамильтоновой механики.

Из проведенного рассмотрения следует, что переменная t, параметризующая линии времени, может быть рассмотрена как координата времени физической системы. Это название согласуется с тем фактом, что скорость изменения со временем, например, гравитационного поля равна частной производной по отношению к t, т. е. $D_t = \partial/\partial t$ в естественных координатах.

Таким образом, из (16) и (17) для плотности кинетической и потенциальной энергии гравитационного поля получаем следующее выражение в естественной системе координат:

$$T = \frac{1}{2}(P^\sigma_\sigma)^2 - \frac{1}{2}P^\mu_\nu P^\nu_\mu, \quad U = \frac{1}{2}S.$$

Запишем уравнения гравидинамики (14) и (15) в естественных координатах при условии, что тензор энергии-импульса T_{ij} равен нулю. Имеем

$$\dot{P}^\mu_\nu + P^\sigma_\sigma P^\mu_\nu + S^\mu_\nu = \frac{1}{2}\varepsilon\, \delta^\mu_\nu, \tag{28}$$

$$G_\mu = \nabla_\nu P^\nu_\mu - \partial_\mu P^\sigma_\sigma = 0, \tag{29}$$

где точка обозначает частную производную по отношению к переменной t. Поскольку

$$\dot{P}^\mu_\nu + P^\sigma_\sigma P^\mu_\nu = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{g}\, P^\mu_\nu),$$

уравнения (22) могут быть записаны в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{g}\, P^\mu_\nu) + \sqrt{g} S^\mu_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,\varepsilon\, \delta^\mu_\nu.$$

Ввиду этого и с учетом того, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{g}\varepsilon) = 0,$$

находим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\sqrt{g}\, P^\mu_\nu) = -\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{g}\, S^\mu_\nu).$$

Последнее соотношение показывает, что проблема Коши для гравитационного поля не намного трудней, чем проблема Коши для электромагнитного поля.

Общий вывод состоит в том, что сущностью гравитации является новая полевая концепция времени и закон сохранения энергии, из которого, в частности, вытекает, что так называемая темная энергия является просто энергией гравитационного поля. Ускоренное разбегание галактик означает мощный приток гравитационной энергии в рассматриваемую область.

6. ДВА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим вопрос о точных решениях уравнений гравидинамики (22) и (23). Отправным пунктом нашего рассмотрения является геометрическое, координатно-независимое определение статического гравитационного поля.

Гравитационное поле является *статическим*, если скорость изменения гравитационного потенциала со временем равна нулю,

$$D_{\mathbf{t}} g_{ij} = t^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + g_{kj} \frac{\partial t^k}{\partial u^i} + g_{ik} \frac{\partial t^k}{\partial u^j} = 0.$$

Если скорость изменения со временем гравитационного потенциала равна нулю в одной системе координат, то она будет равна нулю и в любой другой системе координат. Следовательно, определение статического гравитационного поля общековариантно.

Для статического гравитационного поля импульс этого поля равен нулю, и это можно рассматривать как другое, эквивалентное определение статического гравитационного поля. Поскольку

$$D_t g_{ij} = \nabla_i t_j + \nabla_j t_i, \quad \nabla_i t_j - \nabla_j t_i = 0,$$

уравнения

$$\nabla_i t_j = 0$$

можно рассматривать как еще одно определение статического гравитационного поля.

Из уравнений (14) и (15) нетрудно вывести, что нетривиальное гравитационное поле само по себе не может быть статическим. Этот факт является важной мотивацией для рассмотрения эвристических, внешних представлений о сферической симметрии и сферической гравитационной волне. Мы предполагаем, что при отсутствии других физических полей уравнения гравидинамики могут иметь решение в виде ударной сферической гравитационной волны, энергия которой сосредоточена на фронте волны. В естественных координатах эта волна может быть представлена следующим образом:

$$dl^2 = A^2 dr^2 + B^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

где $A = A(r \pm t), \quad B = B(r \pm t)$. Для не равных нулю компонент тензора Риччи находим следующие выражения:

$$S_{11} = \frac{2}{AB}(A^{'}B^{'} - AB^{''}), \quad S_{22} = \frac{B}{A^3}(A^{'}B^{'} - AB^{''}) + 1 - \frac{B^{'2}}{A^2}$$

и $S_{33} = S_{22}\sin^2\theta$, где штрих означает производную по переменной r. Следовательно, для потенциальной энергии этой конфигурациии имеем

$$U = \frac{1}{2}S = \frac{2}{A^3 B}(A^{'}B^{'} - AB^{''}) + \frac{1}{B^2}\left(1 - \frac{B^{'2}}{A^2}\right).$$

Чтобы определить, где $U = 0$, немедленно полагаем $B^{'} = A$.

Для отличных от нуля компонент импульса гравитационного поля находим

$$P_1^1 = \frac{\dot{A}}{A}, \quad P_2^2 = P_3^3 = \frac{\dot{B}}{B},$$

где точка означает производную по переменной t. Вектор потока энергии гравитационного поля имеет только одну нетривиальную компоненту

$$\mathrm{G}_1 = \frac{2}{AB}(\dot{A}B^{'} - A\dot{B}^{'}),$$

и согласно соотношению $A = B^{'}$ уравнение $\mathrm{G}_i = 0$ удовлетворяется. В результате остаются два уравнения

$$2B\ddot{B} + \dot{B}^2 = 0, \quad \ddot{A}B^2 + \dot{A}\dot{B}B = \frac{1}{2}A\dot{B}^2.$$

Поскольку $A = A(r \pm t), \quad B = B(r \pm t)$, из уравнения, содержащего только неизвестную функцию B, находим, что $B\dot{B}^2 = m$, m — это постоянная интегрирования. Следовательно,

$$B = m\left[\frac{3}{2}\frac{(r \pm t)}{m}\right]^{2/3}.$$

Поскольку $A = B^{'}$, то

$$A^{-1} = \left[\frac{3}{2}\frac{(r \pm t)}{m}\right]^{1/3}.$$

Нетрудно убедиться, что второе уравнение для A и B при этом также удовлетворяется. Таким образом, решение уравнений гравидинамики, инвариантное относительно обращения времени, может быть представлено в следующей форме:

$$ds^2 = dt^2 + \frac{dr^2}{\left[\frac{3}{2}\frac{(r-t)}{m}\right]^{2/3}} + \left[\frac{3}{2}\frac{(r-t)}{m}\right]^{4/3} m^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

для $t \geqslant 0$ и

$$ds^2 = dt^2 + \frac{dr^2}{\left[\frac{3}{2}\frac{(r+t)}{m}\right]^{2/3}} + \left[\frac{3}{2}\frac{(r+t)}{m}\right]^{4/3} m^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

для $t \leqslant 0$.

Так как кинетическая энергия $T = 0$ для $r \pm t \neq 0$, то можно заключить, что найденное решение имеет сингулярность на фронте волны, где сосредоточена энергия ударной сферической гравитационной волны. Чтобы сравнить полученное решение с решением Шварцшильда из общей теории относительности, также обладающим сферической симметрией, можно использовать преобразование координат [2]. В результате получаем, что ударная сферическая гравитационная волна рассматривается как статическое решение в общей теории относительности при том, что общековариантное определение статического поля здесь отсутствует. Это лишает даваемую там физическую интерпретацию достаточного основания. *Таким образом, даваемая общей теорией относительности фиктивная «статическая» картина явления скрывает действительный динамический процесс, и, следовательно, экспериментальные исследования должны быть ориентированы на подтверждение или опровержение той или иной физической ситуации.*

Поскольку так называемая темная энергия является просто энергией гравитационного поля, то это дает повод рассмотреть еще одну весьма простую, но важную физическую задачу. Идея о Вселенной с однородным и изотропным распределением гравитационной энергии может быть реализована в естественных координатах однопараметрическим классом метрик

$$dl^2 = a^2(t)d\sigma^2,$$

где $d\sigma^2$ есть метрика единичной трехмерной сферы, которая в четырехмерных сферических координатах имеет вид

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Задача состоит в том, чтобы найти функцию $a(t)$. Имеем

$$S^\mu_\nu = \frac{2}{a^2}\delta^\mu_\nu, \quad P^\mu_\nu = \frac{\dot{a}}{a}\delta^\mu_\nu,$$

и, следовательно, для плотности гравитационной энергии получается такое выражение:

$$\varepsilon_g = \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + 1).$$

Мы знаем, что $\partial(\sqrt{g}\,\varepsilon_g)/\partial t = 0$. Так как $\sqrt{g} = a^3\sin^2\psi\sin\theta$, то, интегрируя по переменным ψ, θ, ϕ, из закона сохранения энергии получаем следующее дифференциальное уравнение для $a(t)$:

$$a(\dot{a}^2 + 1) = 2a_0 = \mathrm{const}.$$

В новой переменной η, такой, что $dt = a\eta$, решение этого уравнения может быть представлено в виде $a = a_0(1 - \cos\eta)$. Таким образом, эволюция

Вселенной с однородным и изотропным распределением одной только гравитационной энергии описывается в параметрической форме следующими уравнениями:

$$a = a_0(1 - \cos\eta), \quad t = a_0(\eta - \sin\eta).$$

Это решение имеет смысл, если $a \geqslant a_0$ и имеет место инвариантность относительно обращения времени. Таким образом, $-\dfrac{3\pi}{2} \leqslant \eta < -\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \eta \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$.

Найденное решение предполагает, что Вселенная заполнена только гравитационной энергией. Формально такое же решение, известное как решение Фридмана, найдено в общей теории относительности при условии, что Вселенная заполнена некоторой первородной пылью неизвестной природы («темной материей»). *Из гипотезы геометризации следует, что материя во Вселенной имеет полевую природу и картина Вселенной, заполненной только гравитационной энергией, является с различных точек зрения хорошим приближением. Однако это только приближение к действительности, так как необходимо учитывать и другие формы энергии. В рамках общей квантовой механики такой формой энергии может быть только энергия обобщенного электромагнитного поля.* Для представлений о «Большом взрыве» нет достаточного основания ни с физической, ни с математической точек зрения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение подведем некоторые итоги. Сформулированы основные понятия и принципы гравидинамики как раздела единой геометрической теории фундаментальных взаимодействий. Открыта абсолютная форма закона сохранения энергии, установлены фундаментальные уравнения, описывающие циркуляцию энергетических потоков, что означает реальность обнаружения и практического использования энергии гравитационного поля. Открытие энергии гравитационного поля является важным, но естественным результатом общей квантовой механики, так как в естественных физических процессах происходит перераспределение различных форм энергии, и это является общей и наиболее важной характеристикой этих процессов. Для естественных физических процессов не может быть их внешней причины. Приводя в соответствие гравитационную энергию с темной энергией и темную материю с обобщенным электромагнитным полем (тяжелым светом), общая квантовая механика дает решение проблемы материи и, таким образом, открывает возможность развития теоретической космологии на совершенно новых основаниях. В естественных процессах, описываемых общей квантовой механикой, потоки гравитационной энергии играют очень важную роль как совершенно обычное и универсальное явление, поэтому представляется важным и интересным найти простые методы их детектирования и использования. Для этого необходимо прежде всего систематизировать и проанализировать все факты, которые могут быть истолкованы как имеющие отношение к потокам гравитационной энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.

2. *Dirac P. A. M.* General Theory of Relativity. John Wiley and Sons, Inc., 1975;
Дирак П. А. М. Общая теория относительности. М.: Атомиздат, 1978.

Получено 20 декабря 2012 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 05.03.2013.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,44. Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 325 экз. Заказ № 57933.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/