P2-2012-143

А. Б. Пестов *

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ. ОБОБЩЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

*E-mail: pestov@theor.jinr.ru

Пестов А. Б. P2-2012-143
Геометрическая теория фундаментальных взаимодействий.
Обобщенное электромагнитное поле

В этом сообщении сформулирована теория обобщенного электромагнитного поля, названная так потому, что состояние этого поля, инвариантное относительно всех преобразований ассоциированной с ним локальной внутренней симметрии, соответствует собственно электромагнитному полю. Введено понятие основного состояния обобщенного электромагнитного поля, и дан дедуктивный вывод уравнений этого поля в геометрической и динамической форме. Выведены общековариантные уравнения Максвелла для напряженностей электрического и магнитного полей. Дана физическая интерпретация теории обобщенного электромагнитного поля.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2012

Pestov I. B. P2-2012-143
Geometric Theory of Fundamental Interactions.
Generalized Electromagnetic Field

In this report a theory of a generalized electromagnetic field is formulated, which is titled so because the singlet state of this field corresponds to the electromagnetic field. A concept of a ground state of the generalized electromagnetic field is introduced and deductive derivation of equations of this field in both geometrical and dynamical form is given. The general covariant Maxwell equations for the electric and magnetic fields are derived. A physical interpretation of the theory of the generalized electromagnetic field is given.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2012

ВВЕДЕНИЕ

Обобщенное электромагнитное поле — это одна из собственно геометрических полевых величин, которая в дифференциальной геометрии называется линейной связностью. Этим определяется место и положение обобщенного электромагнитного поля как объекта исследований в современной дифференциальной геометрии. Статус линейной связности как физического поля вытекает из гипотезы геометризации и последовательно устанавливается в этой главе в тесной связи с общей концепцией потенциального поля и естественной геометрической внутренней симметрией, которая рассматривается здесь как максимальное расширение двухсторонней или билатеральной симметрии. Напомним, что двухсторонняя симметрия определяется полем времени и потоком времени. Поток времени — это необходимое условие для точной формулировки фундаментального динамического понятия — скорости изменения полевой величины со временем. Поле времени относится к системам с собственным поведением, движение в которых абсолютно не зависит от каких-либо внешних, заранее заданных условий. Время в таком случае существует как природное качество, неразрывно связанное со всякой динамической системой. Введение концепции обобщенного электромагнитного поля означает естественную геометризацию электромагнитного поля и, следовательно, включение электромагнитного поля в рамки общей квантовой механики. Обобщенное электромагнитное поле для краткости упоминается как джеф. Отсюда джефстатика, джефдинамика, джефсимметрия. В теорию обобщенного электромагнитного поля естественным образом входит масштаб размерности длины, который характеризует размеры области, вне которой напряженность этого поля быстро спадает. Преобразования джефсимметрии, задающие нелинейное представление полной линейной группы $GL(n, \mathbf{R})$, касаются только функций поля и не затрагивают координат. Этим они отличаются от локальных диффеоморфизмов. Обобщенное электромагнитное поле взаимодействует только со своим основным состоянием и гравитационным полем и никак не проявляет себя во взаимодействии с обычным веществом.

Как известно, темная материя представляет собой одну из загадок современной космологии [1–3]. Темная материя не испускает и не отражает электромагнитного излучения и воздействует на другие видимые небесные тела только гравитационным образом. Если представлять темную материю в терминах частиц, то из космологических наблюдений следует, что эти частицы не относятся к известным частицам, они нейтральны, скорее массивны, чем нет, стабильны и взаимодействуют слабо. Считалось, что наиболее многообещающий кандидат на роль частицы темной материи есть нейтралино, но результаты последних экспериментов на Большом адронном коллайдере делают этот прогноз маловероятным. Все перечисленные характеристики темной материи относятся и к обобщенному электромагнитному полю, поэтому естественно предположить, что это поле соответствует темной материи. Сейчас начались поиски частиц темной материи в лабораторных экспериментах, и сформулированной теории предстоит сделать этот поиск как можно более целенаправленным.

1. КОНЦЕПЦИЯ ОБОБЩЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Определение двухсторонней симметрии применительно к джефу прямо следует из геометрического смысла этой полевой величины. Пусть пара векторных полей $\overline{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{v}$ обладает двухсторонней или зеркальной симметрией, т. е. $\overline{v}^i = R^i_j v^j$. Если векторное поле $\mathbf{v}$ удовлетворяет уравнению параллельного переноса, то поле, ему зеркальное, не будет удовлетворять тому же самому уравнению. Векторное поле $\overline{\mathbf{v}}$ будет удовлетворять уравнению параллельного переноса по отношению к связности, которую можно назвать зеркальной данной связности. Другими словами, параллельный перенос системы двух векторных полей, обладающей двухсторонней симметрией, определяется парой связностей $\overline{P}^i_{jk}$ и P^i_{jk}, также обладающих двухсторонней симметрией. Из закона параллельного переноса векторных полей вытекает закон преобразования для связностей при отражении:

$$\overline{P}^i_{jk} = R^i_m P^m_{jn} R^n_k + R^i_m \partial_j R^m_k.$$

Так определенная двухсторонняя симметрия допускает естественное максимальное расширение и приобретает статус джефсимметрии $GL(n, \mathbf{R})$. Закон преобразования потенциала джефа имеет вид

$$\overline{P}^i_{jk} = S^i_m P^m_{jn} T^n_k + S^i_m \partial_j T^m_k,$$

где T^i_j есть компоненты оператора S^{-1}, обратного оператору S, $S^i_k T^k_j = \delta^i_j$. Джефсимметрия будет рассматриваться как в динамической, так и в статической теории обобщенного электромагнитного поля. Докажем, что преобразования джефсимметрии не выводят за рамки класса собственно геометрических полевых величин.

Рассмотрим бесконечно малое преобразование джефсимметрии, полагая $S^i_k = \delta^i_k + U^i_k$. Тензорное поле U^i_k может быть представлено в виде суммы двух тензорных полей $U^i_k = X^i_j + Y^i_j$, где

$$X^i_j = \frac{1}{2}(U^i_k + \widetilde{U}^i_k), \quad Y^i_j = \frac{1}{2}(U^i_k - \widetilde{U}^i_j), \quad \widetilde{U}^i_j = g^{ik} U^l_k g_{lj}.$$

Из определения следует, что $\widetilde{X}^i_j = X^i_j$, $\widetilde{Y}^i_j = -Y^i_j$ или $X_{ij} = X_{ji}$, $Y_{ij} = -Y_{ji}$, где $X_{ij} = X^l_i g_{lj}$, $Y_{ij} = Y^l_i g_{lj}$. Таким образом, общее линейное преобразование всегда можно задать с помощью двух ковариантных тензорных полей:

симметричного и антисимметричного, которые входят в класс собственно геометрических полевых величин, что и требовалось доказать.

Джефсимметрия, очевидно, есть максимально возможное расширение билатеральной симметрии и поэтому уравнения обобщенного электромагнитного поля, согласованные с этой симметрией, выражают наиболее общий физический закон. Статическая теория обобщенного электромагнитного поля упоминается как джефстатика, а динамическая — как джефдинамика.

Физический смысл обобщенного электромагнитного поля состоит в следующем. Это поле ставится в соответствие так называемой темной материи, а его синглетное состояние, как будет показано, является полем Фарадея–Максвелла. Синглетным состоянием джефа называется такое состояние, которое инвариантно относительно всех преобразований джефсимметрии. Физический смысл джефсимметрии, как будет ясно из последующего, состоит в том, что основное состояние обобщенного электромагнитного поля имеет нетривиальную структуру, а уравнения основного состояния нарушают джефсимметрию. В этом смысле основное состояние обобщенного электромагнитного поля можно рассматривать как наблюдаемое проявление джефсимметрии. Существование основного состояния джефа позволяет сформулировать теорию обобщенного электромагнитного поля как теорию поля с эффективной массой, инвариантную относительно преобразований джефсимметрии. Поэтому можно сказать, что темная материя — это скрытый тяжелый свет. Идея о возможном существовании второй разновидности фотонов, не связанных с известными формами материи, была сформулирована достаточно давно и до сих пор активно проверяется [4]. Джефдинамика обеспечивает этим поискам определенную целенаправленность.

2. КОНЦЕПЦИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

Наряду с концепцией собственно геометрической полевой величины введем также общую концепцию потенциального поля, которая тесно связана с принципом минимальности гравитационных взаимодействий, означающим, что в лагранжианы физических полей, отличных от гравитационного поля, не должны входить производные от потенциала гравитационного поля, т. е. ковариантные производные. Дадим теперь общее определение потенциального поля.

Пусть из компонент некоторой собственно геометрической полевой величины и их частных производных можно составить с помощью одних только алгебраических операций новую геометрическую величину, тогда возникшая пара геометрических величин называется потенциальным полем. Потенциальное поле характеризуется потенциалом P и напряженностью H и в последующем записывается как пара (P, H). Связь между потенциалом и напряженностью называется естественной производной и в символической форме записывается следующим образом: $H = \partial P$. Связь концепции потенциального поля с принципом минимальности гравитационных взаимодействий состоит в том, что для потенциального поля (P, H) можно построить лагранжиан, который не содержит ковариантных производных.

Докажем, что все собственно геометрические полевые величины являются потенциальными полями. Если взять компоненты симметричного ковариантного тензорного поля g_{ij} и рассмотреть частные производные этих компонент, то эти производные не составляют компонент тензора или какого-либо геометрического объекта. Однако из компонент g_{ij} и их частных производных с применением только алгебраических операций составляется новая геометрическая величина, компоненты которой называются символами Кристоффеля и описываются хорошо известной формулой

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_j g_{kl} - \partial_l g_{jk}), \tag{1}$$

где g^{il} есть контравариантные компоненты g_{ij}. Символы Кристоффеля являются естественной производной g_{ij}. В рассмотренном случае (в соответствии с определением потенциального поля) g_{ij} есть потенциал, а Γ^i_{jk} — напряженность. Потенциальное поле (g, Γ) ставится в соответствие гравитационному полю.

Естественной производной спинового поля является внешнее дифференцирование, которое снова дает спиновое поле.

Естественной призводной линейной (аффинной) связности является тензор Римана этой связности:

$$H_{ijl}{}^k = \partial_i P^k_{jl} - \partial_j P^k_{il} + P^k_{im} P^m_{jl} - P^k_{jm} P^m_{il}.$$

Как видно из этой формулы, отличительной особенностью обобщенного электромагнитного поля является его самодействие: поскольку оно является нелинейным даже при отсутствии других полей. Следовательно, общее электромагнитное поле, которое ставится в соответствие темной материи или скрытому свету, является не только собственно геометрической полевой величиной, но и новым потенциальным полем.

Естественной производной поля времени является поток времени, определенный выше. Этим доказательство завершено.

Для краткости и выразительности письма в последующем будем использовать матричные обозначения, выделяя при этом матрицы жирным шрифтом. Приведем основной список обозначений, который будет использоваться в последующем:

$$\mathbf{S} = (S^k_l), \quad \mathbf{P}_i = (P^k_{il}), \quad \mathbf{E} = (\delta^k_l), \quad \mathbf{H}_{ij} = (H_{ijl}{}^k), \quad \mathrm{Tr}\, \mathbf{S} = S^k_k.$$

В новых обозначениях закон преобразования потенциала джефа $\mathbf{P}_i$ принимает вид

$$\overline{\mathbf{P}}_i = \mathbf{S}\mathbf{P}_i\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S}\partial_i\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{P}_i + \mathbf{S}\mathrm{D}_i\mathbf{S}^{-1}, \tag{2}$$

где D_i обозначает естественный дифференциальный оператор, согласованный с рассматриваемой внутренней симметрией и определяемый так:

$$\mathrm{D}_i\mathbf{S} = \partial_i\mathbf{S} + \mathbf{P}_i\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{P}_i = \partial_i\mathbf{S} + [\mathbf{P}_i, \mathbf{S}].$$

Этот оператор имеет важное значение при рассмотрении джефсимметрии и выводе уравнений обобщенного электромагнитного поля. Соотношение (2) является преобразованием связности, так как $\mathbf{S}\mathrm{D}_i\mathbf{S}^{-1}$ есть тензорное поле типа (1,2) и поэтому $\overline{\mathbf{P}}_i$ преобразуется так же, как $\mathbf{P}_i$, при произвольных преобразованиях координат. Здесь следует отметить, что все индексы, нумерующие компоненты джефа, являются координатными, но два из них связаны с преобразованиями внутренней симметрии. В этом состоит важная особенность геометрической теории фундаментальных взаимодействий вообще и теории обобщенного электромагнитного поля в частности. В матричных обозначениях связь потенциала джефа с его напряженностью дается соотношением

$$\mathbf{H}_{ij} = \partial_i\mathbf{P}_j - \partial_j\mathbf{P}_i + [\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j],$$

из которого следует, что закон преобразования тензора напряженности при преобразованиях джефсимметрии является однородным:

$$\overline{\mathbf{H}}_{ij} = \mathbf{S}\mathbf{H}_{ij}\mathbf{S}^{-1}. \tag{3}$$

Для напряженности джефа $\mathbf{H}_{ij}$ справедливо соотношение

$$\mathrm{D}_i\mathbf{H}_{jk} = \partial_i\mathbf{H}_{jk} + [\mathbf{P}_i, \mathbf{H}_{jk}],$$

и если $\overline{\mathrm{D}}_i$ определяется потенциалом $\overline{\mathbf{P}}_i$, то из (2) и (3) следует, что

$$\overline{\mathrm{D}}_i\overline{\mathbf{H}}_{jk} = \mathbf{S}(\mathrm{D}_i\mathbf{H}_{jk})\mathbf{S}^{-1}.$$

В общем случае оператор D_i не является общековариантным, однако коммутатор $[\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_j]$ всегда является общековариантным, поскольку

$$[\mathrm{D}_i,\, \mathrm{D}_j]\mathbf{S} = [\mathbf{H}_{ij}, \mathbf{S}].$$

Для напряженности это соотношение принимает вид

$$[\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_j]\mathbf{H}_{kl} = [\mathbf{H}_{ij}, \mathbf{H}_{kl}]. \tag{4}$$

Таким образом, обобщенное электромагнитное поле, описывающее не только видимый, но и скрытый свет (темную материю), является носителем внутренней симметрии, имеет геометрическую интерпретацию и обеспечивает весьма нетривиальную связь джефсимметрии с принципом общей ковариантности.

3. УРАВНЕНИЯ ДЖЕФСТАТИКИ

В этом разделе дан вывод уравнений джефстатики. После того как эта задача будет полностью решена, переход к динамической теории обобщенного электромагнитного поля совершается увеличением размерности физического пространства на единицу и заменой римановой метрики введенной выше вспомогательной метрикой, которая определяется полем времени, т. е. естественной причинной структурой физического многообразия. Задача вывода уравнений джефдинамики считается полностью решенной, когда раскрыта причинная структура этих уравнений. Для этого нужно найти оператор эволюции, т. е. записать рассматриваемые уравнения в такой репараметризационно-инвариантной форме, которая ясно показывает, как, зная состояние поля в определенный момент времени, найти состояния этого поля в последующие моменты времени. Там, где это не связано с какими-то особыми усложнениями, размерность физического пространства является параметром. Этим подчеркивается выделенность физических размерностей три и четыре.

Уравнения джефстатики предполагают выполнение следующих условий: порядок уравнений не выше второго, соответствие принципу минимальности гравитационных взаимодействий, репараметризационная инвариантность. Всем этим требованиям удовлетворяет лагранжиан

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\mathbf{H}_{ij}\mathbf{H}^{ij}), \tag{5}$$

где $\mathbf{H}^{ij} = g^{ik}g^{jl}\mathbf{H}_{kl}$, который образует основу всего последующего рассмотрения. Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразований джеф-симметрии, которую в данном случае можно рассматривать как следствие принципа минимальности гравитационных взаимодействий и вытекающей из него концепции потенциального поля. Особое значение джефсимметрии состоит здесь, собственно говоря, в том, что она исключает из рассмотрения тензорные величины типа H^l_{ljk} или $P^l_{jk} - P^l_{kj}$ и этим обеспечивает единственность основного лагранжиана.

Потенциалам джефа $\mathbf{P}_i$ и $\overline{\mathbf{P}}_i = \mathbf{S}\mathbf{P}_i\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S}\partial_i\mathbf{S}^{-1}$ соответствует одно и то же значение лагранжиана $\mathcal{L}_P$. Эта ситуация аналогична вырождению энергетических уровней в квантовой механике. В квантовой механике снятие вырождения обеспечивается рассмотрением полного набора операторов, коммутирующих с гамильтонианом или введением внешнего поля, что делает наблюдаемой ту симметрию, которая стоит за этим явлением. В джефстатике и джефдинамике физический смысл вырождения связан с тем, что определенное ниже основное состояние общего электромагнитного поля имеет нетривиальную структуру, которая обретает форму нового потенциального поля. Снятие вырождения при этом естественным образом определяется самой физической системой, а не какими-либо внешними условиями, не имеющими никакого отношения к природе вещей. Это очень важно, так как не имеет смысла решать уравнения, имеющие функциональный произвол. Эти уравнения предварительно должны быть естественным образом пополнены, чтобы нарушить исходную симметрию уравнений, не потеряв при этом исходной симметрии всех физических величин. В последующем эти общие рассуждения будут конкретизированы.

Варьируя лагранжиан $\mathcal{L}_P$ по $\mathbf{P}_i$ и используя соотношение

$$\delta\mathbf{H}_{ij} = \mathrm{D}_i\delta\mathbf{P}_j - \mathrm{D}_j\delta\mathbf{P}_i,$$

получаем

$$\delta\mathcal{L}_P = \mathrm{Tr}((\frac{1}{\sqrt{g}}\mathrm{D}_i(\sqrt{g}\mathbf{H}^{ij}))\delta\mathbf{P}_j) - \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i\mathrm{Tr}(\sqrt{g}\mathbf{H}^{ij}\delta\mathbf{P}_j)$$

и отсюда, при выполнении обычных условий, уравнения поля

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\mathrm{D}_i(\sqrt{g}\mathbf{H}^{ij}) = 0, \tag{6}$$

где $g = \mathrm{Det}(g_{ij})$. Вторая группа уравнений

$$\mathrm{D}_i\mathbf{H}_{jk} + \mathrm{D}_j\mathbf{H}_{ki} + \mathrm{D}_k\mathbf{H}_{ij} = 0 \tag{7}$$

вытекает из тождества Якоби

$$([\mathrm{D}_i,\, [\mathrm{D}_j,\, \mathrm{D}_k]] + [\mathrm{D}_j,\, [\mathrm{D}_k,\, \mathrm{D}_i]] + [\mathrm{D}_k,\, [\mathrm{D}_i,\, \mathrm{D}_j]])\mathbf{S} = 0.$$

Из основного свойства оператора D_i следует, что уравнения (6) и (7) инвариантны относительно преобразований джефсимметрии. Если $\mathbf{P}_i$ — решение названных уравнений, то $\overline{\mathbf{P}}_i = \mathbf{S}\mathbf{P}_i\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S}\partial_i\mathbf{S}^{-1}$ также решение тех же самых уравнений.

Покажем, что уравнения джефстатики являются общековариантными. Метод, которым это будет сделано, является ключом для установления причинной структуры динамических уравнений общего электромагнитного поля. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\mathrm{D}_i(\sqrt{g}\mathbf{H}^{ij}) = \partial_i\mathbf{H}^{ij} + \Gamma^n_{ni}\mathbf{H}^{ij} + [\mathbf{P}_i,\, \mathbf{H}^{ij}],$$

так как $\Gamma^n_{ni} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i\sqrt{g}$. По определению ковариантной производной имеем

$$\nabla_i\mathbf{H}^{ij} = \partial_i\mathbf{H}^{ij} + \Gamma^n_{ni}\mathbf{H}^{ij} + \Gamma^j_{in}\mathbf{H}^{in} + \mathbf{\Gamma}_i\mathbf{H}^{ij} - \mathbf{H}^{ij}\mathbf{\Gamma}_i,$$

где $\mathbf{\Gamma}_i = (\Gamma^k_{il})$. Вводя тензорное поле

$$W^k_{il} = P^k_{il} - \Gamma^k_{il}, \quad \mathbf{W}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{\Gamma}_i$$

и учитывая, что $2\Gamma^j_{in} H^{in\,k}_{\ \ \ l} = (\Gamma^j_{in} - \Gamma^j_{ni}) H^{in\,k}_{\ \ \ l} = 0$, уравнениям (6) можно придать следующий, явно общековариантный, вид:

$$\nabla_i \mathbf{H}^{ij} + [\mathbf{W}_i, \mathbf{H}^{ij}] = 0.$$

Аналогично можно показать, что уравнения (7) представимы в виде

$$\nabla_i \mathbf{H}_{jk} + \nabla_j \mathbf{H}_{ki} + \nabla_k \mathbf{H}_{ij} + [\mathbf{W}_i,\, \mathbf{H}_{jk}] + [\mathbf{W}_j,\, \mathbf{H}_{ki}] + [\mathbf{W}_k,\, \mathbf{H}_{ij}] = 0.$$

Таким образом, репараметризационная инвариантность уравнений (6) и (7) доказана.

Варьируя скалярную плотность $\sqrt{g}\mathcal{L}_P$ по g^{ij}, получаем тензор напряжений общего электромагнитного поля в джефстатике

$$T_{ij} = \mathrm{Tr}(\mathbf{H}_{ik} \mathbf{H}_j{}^k) + g_{ij}\mathcal{L}_P, \tag{8}$$

где $\mathbf{H}_j{}^k = \mathbf{H}_{jl} g^{kl}$. Имеет место тождество

$$\nabla^i T_{ij} = \mathrm{Tr}(\mathbf{H}_{jk} \frac{1}{\sqrt{g}} \mathrm{D}_i(\sqrt{g}\mathbf{H}^{ik})) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{H}^{ik}(\mathrm{D}_i \mathbf{H}_{jk} + \mathrm{D}_j \mathbf{H}_{ki} + \mathrm{D}_k \mathbf{H}_{ij})).$$

Отсюда и из уравнений (6) и (7) следует, что тензор напряжений джефа удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_i T^{ij} = 0, \tag{9}$$

где ∇_i обозначает, как обычно, ковариантную производную по отношению к связности (1), принадлежащей гравитационному потенциалу g_{ij} и $\nabla^i = g^{ik}\nabla_k$. Как видно, тензор напряжений общего электромагнитного поля инвариантен относительно преобразований джефсимметрии.

Полное действие для полей g_{ij} и $\mathbf{P}_i$ имеет вид

$$A = -a \int R\sqrt{g}\, d^3u - b\frac{1}{4} \int \mathrm{Tr}(\mathbf{H}_{ij}\mathbf{H}^{ij})\sqrt{g}\, d^3u,$$

где R — скалярная кривизна, a и b — постоянные. Припишем координатам размерность длины и потребуем, чтобы действие было безразмерным. Тогда потенциал джефа имеет размерность обратной длины, поскольку ∂P и PP должны иметь одинаковую размерность. Потенциал гравитационного поля является безразмерным. Поэтому произведение ab является безразмерной величиной, которую можно положить равной единице, $ab = 1$.

Варьируя полное действие A по g^{ij}, получаем уравнения Эйнштейна, описывающие взаимодействие общего электромагнитного поля с гравитационным полем в джефстатике

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = b^2 T_{ij}, \tag{10}$$

где T_{ij} есть тензор напряжений джефа. Уравнения (6), (7) и (10) совместны ввиду (9).

Уравнения (6), (7) и (10) не составляют полную систему уравнений джефстатики как замкнутой системы, так как эта система уравнений инвариантна относительно преобразований джефсимметрии. Величинами, инвариантными относительно преобразований джефсимметрии, являются лагранжиан, тензор натяжений и след тензора напряженности джефа и след тензора девиации. Чтобы найти значения этих величин, нужно решить уравнения поля. Джефсимметрией пространство решений разбивается на классы эквивалентности и этим обнаруживается функциональный произвол, связанный с решением рассматриваемых уравнений. Чтобы избавиться от этого функционального произвола, нужно придать физический смысл девяти степеням свободы общего электромагнитного поля в джефстатике или шестнадцати степеням свободы в джефдинамике. Этим обеспечивается физический смысл джефсимметрии. Из условия самодостаточности и абсолютной замкнутости общей квантовой механики следует, что механизм нарушения джефсимметрии суть внутреннее свойство самой рассматриваемой системы. Чтобы показать, что это действительно так, введем важное понятие основного состояния общего электромагнитного поля.

4. ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ

Основное состояние общего электромагнитного поля задается уравнением $\mathbf{H}_{ij} = 0$ и характеризуется также равенством нулю тензора натяжений. Найдем общее решение рассматриваемого уравнения и убедимся, что при этом потенциал джефа $\mathbf{P}_i \neq 0$ не равен нулю и, следовательно, основное состояние имеет нетривиальную структуру. Поэтому поле, которое является прообразом этой структуры, называется в последующем структурным полем основного состояния джефа, или просто структурным полем.

Пусть дано n линейно независимых ковекторных полей E^μ_i, $p = \mathrm{Det}(E^\mu_i) \neq 0$. Греческие индексы являются нумерующими и принимают те же значения, что и координатные. Чтобы избежать путаницы при записи компонент ковекторов в виде матрицы, естественно принять, что

$$i = 1,\, 2, \ldots, n; \quad \mu = \bar{1},\, \bar{2}, \ldots, \bar{n}.$$

При общем преобразовании координат $u^i = \tilde{u}^i(u)$ каждое из этих ковекторных полей преобразуется следующим образом:

$$\tilde{E}^\mu_i = E^\mu_k \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i}, \quad \mu = \bar{1},\, \bar{1}, \ldots, \bar{n}.$$

Из компонент E_i^μ чисто алгебраически строятся компоненты взаимной системы векторных полей E_μ^i, такой, что выполняются уравнения

$$E_\mu^i E_j^\mu = \delta_j^i, \quad E_\mu^i E_i^\nu = \delta_\mu^\nu. \tag{11}$$

Полагая $P_{jk}^i = L_{jk}^i$, где

$$L_{jk}^i = E_\mu^i \partial_j E_k^\mu, \tag{12}$$

нетрудно убедиться, что это состояние джефа является основным, т. е. для него уравнения $H_{ij} = 0$ удовлетворяются для любой линейно независимой системы ковекторных полей E_k^μ. Если $\overline{\mathbf{L}}_i$ есть другое решение, то можно показать, что

$$\overline{E}_\mu^i = S_k^i E_\mu^k, \quad \overline{\mathbf{L}}_i = \mathbf{S}\mathbf{L}_i\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S}\partial_i\mathbf{S}^{-1}.$$

Таким образом, структурное поле также является потенциальным полем (E, L), задающим представление джефсимметрии. Введем тензорное поле

$$Q_{jk}^i = P_{jk}^i - L_{jk}^i = -E_\mu^i(\partial_j E_k^\mu - P_{jk}^l E_l^\mu = -E_\mu^i(D_j E_k^\mu = E_k^\mu D_j E_\mu^i, \tag{13}$$

которое можно рассматривать как возбуждение основного состояния джефа. В дифференциальной геометрии такое тензорное поле называется формой связности.

При преобразованиях джефсимметрии этот тензор преобразуется однородно:

$$\overline{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{S}\mathbf{Q}_i\mathbf{S}^{-1}.$$

Поэтому след этого тензора является важной физической величиной, ковекторным полем, инвариантным относительно преобразований джефсимметрии. Обозначив это ковекторное поле A_i, получаем

$$A_i = \mathrm{Tr}\mathbf{Q}_i.$$

Тензор Q является приводимым, и поэтому в последующем будет рассматриваться только неприводимый тензор

$$T_{jk}^i = Q_{jk}^i - \frac{1}{n}Q_{jm}^m\delta_k^i, \quad \mathbf{T}_j = \mathbf{Q}_j - \frac{1}{n}(\mathrm{Tr}\mathbf{Q}_j)\mathbf{E},$$

след которого равен нулю. Для рассмотрения этого тензора есть и другая причина, о которой будет идти речь ниже. С открытием основного состояния джефа появляется возможность модифицировать его лагранжиан, оставаясь в рамках требований репараметризационной инвариантности и инвариантности относительно преобразований джефсимметрии,

$$\mathcal{L}_P = -b\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\mathbf{H}_{ij}\mathbf{H}^{ij}) - \frac{a}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{T}_i\mathbf{T}^i), \tag{14}$$

где a есть постоянная, которую естественно отождествить с постоянной, характеризующей рассматриваемую систему полей. Варьируя (14) по P^i_{jk}, получаем следующие уравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\mathrm{D}_i(\sqrt{g}\mathbf{H}^{ij}) = {}^2\mathbf{T}^j. \qquad (15)$$

Из (15) следует, что тензорное поле $\mathbf{T}^i$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\mathrm{D}_i(\sqrt{g}\mathbf{T}^i) = 0, \qquad (16)$$

так как согласно (3) $\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j(\sqrt{g}\mathbf{H}^{ij}) = 0$. Эти уравнения, которые инвариантны относительно преобразований джефсимметрии, налагают девять дополнительных условий на потенциал $\mathbf{P}_i$, вводя при этом девять дополнительных степеней свободы, которые являются компонентами структурного поля. При этом очень важно, что те же самые уравнения появляются при варьировании лагранжиана (15) по E^i_μ. Таким образом, можно констатировать, что основное состояние джефа позволяет ввести новые степени свободы, не изменяя общего их числа. Остается только вывести уравнения структурного поля, которые с необходимостью обеспечат нарушение джефсимметрии, поскольку из компонент потенциала основного состояния нельзя построить лагранжиан, инвариантный относительно преобразований джефсимметрии. Если бы существовали общековариантные уравнения структурного поля, инвариантные относительно преобразований джефсимметрии, то и сама эта симметрия имела бы мало смысла.

5. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРНОГО ПОЛЯ

Джефсимметрия будет нарушена, если ввести в рассмотрение тензорное поле

$$H^i_{jk} = E^i_\mu(\partial_j E^\mu_k - \partial_k E^\mu_j), \qquad (17)$$

косимметричное относительно ковариантных индексов. Действительно, из (5) следует, что это тензорное поле не задает представления рассматриваемой внутренней симметрии. Таким образом, это тензорное поле является естественным механизмом нарушения джефсимметрии, ее наблюдаемым проявлением. Потенциальное поле (E, H), которое ставится в соответствие основному состоянию джефа, как было сказано, называется структурным полем. Простейший, геометрически мотивированный лагранжиан структурного поля получается при рассмотрении связности вида

$$Z^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + H^i_{jk} = L^i_{jk} + \Gamma^i_{kj} - L^i_{kj}, \qquad (18)$$

где первое слагаемое представляют символы Кристоффеля (1). Это по существу единственная естественная связность, которую можно составить из связности основного состояния джефа и связности Леви-Чивиты, представляющей гравитационное поле. Тензор Римана введенной связности может быть записан в следующем виде:

$$B_{ijk}{}^{l} = R_{ijk}{}^{l} + \nabla_i H^l_{jk} - \nabla_j H^l_{ik} + H^l_{im} H^m_{jk} - H^l_{jm} H^m_{ik}, \tag{19}$$

где

$$R_{ijk}{}^{l} = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik} \tag{20}$$

есть тензор кривизны метрики g_{ij}, а ∇_i, как и ранее, обозначает ковариантную производную по отношению к символам Кристоффеля этой метрики:

$$\nabla_i H^l_{jk} = \partial_i H^l_{jk} + \Gamma^l_{im} H^m_{jk} - \Gamma^m_{ij} H^l_{mk} - \Gamma^m_{ik} H^l_{jm}.$$

Сверткой получаем из (19) тензор Риччи рассматриваемой связности

$$B_{jk} = B_{ijk}{}^{i} = R_{jk} + \nabla_i H^i_{jk} - \nabla_j H^i_{ik} + H^i_{im} H^m_{jk} - H^i_{jm} H^m_{ik}, \tag{21}$$

где R_{jk} есть тензор Риччи гравитационного поля. Из (21) сверткой с метрикой получаем скалярную кривизну рассматриваемой связности в следующем виде:

$$B = g^{jk} B_{jk} = R + g^{jk} U^l_{jm} U^m_{kl} - \nabla_j U^j,$$

где R есть скалярная кривизна гравитационного поля и $H^j = g^{jk} H^l_{lk}$. Таким образом, скалярная кривизна B введенной связности дает естественный, геометрически мотивированный лагранжиан, обобщающий лагранжиан Эйнштейна–Гильберта и содержащий законы взаимодействия гравитационного поля с основным состоянием джефа. Таким образом, простейший лагранжиан структурного поля $\mathcal{L}_{sf}$ дается формулой

$$\mathcal{L}_{sf} = \frac{1}{2} g^{jk} H^l_{jm} H^m_{kl}, \tag{22}$$

которая показывает, что он согласуется с принципом минимальности гравитационных взаимодействий, так как не содержит производных от компонент гравитационного потенциала. Интересной особенностью этого лагранжиана является симметричный тензор $S_{jk} = H^l_{jm} H^m_{kl}$, который можно рассматривать как аналог симметричного тензора Риччи R_{jk}, играющего столь важную роль в теории гравитационного поля. Таким образом, тензорное поле H^i_{jk} естественно рассматривать как напряженность структурного поля с потенциалом E^μ_i. В гравитации этому потенциальному полю соответствуют символы Кристоффеля и потенциал гравитационного поля.

В заключение этого раздела установим еще одну любопытную связь между рассматриваемыми потенциальными полями. Стандартный лагранжиан гравитационного поля $L_g = R$ содержит вторые производные g_{ij} и это приводит к известным трудностям. Покажем, что этот лагранжиан может быть редуцирован без нарушения общей ковариантности к лагранжиану, не содержащему вторых производных от g_{ij}.

Введем тензорное поле

$$B^i_{jk} = E^i_\mu \nabla_j E^\mu_k = L^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}, \tag{23}$$

которое определяется структурным полем и гравитацией. Полагая

$$L^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + L^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + B^i_{jk}$$

и следуя схеме рассуждений, ведущей к уравнениям (21) и (22), выводим соотношение

$$0 = R_{jk} + \nabla_i B^i_{jk} - \nabla_j B^i_{ik} + B^i_{im} B^m_{jk} - B^i_{jm} B^m_{ik}.$$

Отсюда следует, что

$$R + \nabla_i (g^{jk} B^i_{jk} - g^{ik} B^l_{lk}) = g^{jk} (B^i_{jm} B^m_{ik} - B^i_{im} B^m_{jk}).$$

Таким образом, лагранжиан Эйнштейна–Гильберта эквивалентен лагранжиану

$$\mathcal{L}_{gs} = g^{jk} (B^i_{jm} B^m_{ik} - B^i_{im} B^m_{jk}),$$

что и требовалось доказать.

6. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРНОГО ПОЛЯ

Будем выводить следствия из лагранжиана (22), в котором содержится вся информация о структурном поле. Варьируя действие (22) по отношению к g_{ij}, получаем уравнения Эйнштейна

$$G_{ij} + T_{ij} = 0,$$

где

$$T_{ij} = -g_{ij} \mathcal{L}_{sf} + H^k_{il} H^l_{jk} = S_{ij} - g_{ij} \mathcal{L}_{sf} \tag{24}$$

есть тензор натяжений основного состояния. Из (22) и (24) следует, что $g^{ij} T_{ij} = 2$ и, следовательно, уравнения основного состояния не являются конформно-инвариантными. Это еще одно общее свойство гравитации и основного состояния джефа.

Выведем уравнения структурного поля, варьируя потенциал E^l_μ. Удобно для последующего ввести новое тензорное поле в виде обратимого преобразования тензора напряженности основного состояния

$$F^{ij}_k = g^{il}H^j_{lk} - g^{jl}H^i_{lk} = H^{ij}_k - H^{ji}_k,$$

$$H^i_{jk} = \frac{1}{2}(g^{il}F^{mn}_l g_{jm}g_{kn} + g_{jl}F^{il}_k - g_{kl}F^{il}_j).$$

Поскольку

$$H^i_{jk} = E^i_\mu(\partial_j E^\mu_k - \partial_k E^\mu_j) = E^i_\mu(\nabla_j E^\mu_k - \nabla_k E^\mu_j),$$

получаем из (22) последовательно

$$\delta B = \delta L_v = F^{jk}_l(\nabla_j E^\mu_k)\delta E^l_\mu + F^{jk}_l E^l_\mu \nabla_j \delta E^\mu_l. \tag{25}$$

Согласно (10)

$$\delta E^\nu_k = -E^\nu_l E^\mu_k \delta E^l_\mu,$$

и второе слагаемое в правой стороне (25) может быть записано в следующем виде:

$$\nabla_j(F^{jk}_l E^l_\mu \delta E^\mu_k) + E^\mu_k(\nabla_j F^{jk}_l + F^{jk}_m E^\nu_l \nabla_j E^m_\nu)\delta E^l_\mu.$$

Таким образом, вариационный принцип дает следующую систему уравнений для компонент потенциала основного состояния:

$$E^\mu_k \nabla_j F^{jk}_l + F^{jk}_l \nabla_j E^\mu_k + F^{jk}_m E^\mu_k E^\nu_l \nabla_j E^m_\nu = 0.$$

Эту систему возможно записать в более симметричной форме, т. е. без ковариантных производных от компонент потенциала. Из (16) и (29) получаем

$$E^\nu_l \nabla_j E^m_\nu = -E^m_\nu \nabla_j E^\nu_l = -B^m_{jl}, \quad \nabla_j E^\mu_k = B^m_{jk} E^\mu_m,$$

и, следовательно, уравнения поля приобретают такой вид:

$$\nabla_j F^{jk}_l + B^k_{jm} F^{jm}_l - B^m_{jl} F^{jk}_m = 0. \tag{26}$$

Подобно уравнениям гравитационного поля и уравнениям общего электромагнитного поля выведенные уравнения структурного поля являются существенно нелинейными. Так как $F^{jk}_k = g^{ji}H^k_{ik} = g^{ji}H_i = H^j$, то на решениях уравнений (26) выполняется уравнение

$$\nabla_j H^j = 0,$$

которое имеет форму закона сохранения. Рассматриваемый лагранжиан структурного поля инвариантен относительно преобразований

$$\overline{E}^i_\mu = A^\nu_\mu E^i_\nu, \quad \mathrm{Det}(A^\nu_\mu) \neq 0,$$

где A^ν_μ есть постоянная матрица. Полагая $A^\nu_\mu = a\delta^\nu_\mu$, получим как раз последнее уравнение. Это является сильным указанием на то, что уравнения структурного поля можно записать в форме законов сохранения. Покажем, что это действительно так.

Пусть $\overset{v}{\nabla}_i$ есть ковариантная производная по отношению к связности (17). Имеем

$$\nabla_j F^{jk}_l = \overset{v}{\nabla}_j F^{jk}_l - B^j_{ji} F^{ik}_l - B^k_{jm} F^{jm}_l + B^m_{jl} F^{jk}_m,$$

и уравнения (26) могут быть записаны в следующей форме:

$$(\overset{v}{\nabla}_j - B_j) F^{jk}_l = 0,$$

где B_i есть свертка тензорного поля (23), $B_i = B^k_{ki}$. Так как $\overset{v}{\nabla}_i E^\mu_k = 0$, $\overset{v}{\nabla}_i E^l_\nu = 0$, то из последней редакции уравнений структурного поля следует, что векторные поля

$$J^{i\mu}_\nu = F^{ik}_l E^l_\nu E^\mu_k$$

удовлетворяют уравнениям

$$(\overset{v}{\nabla}_j - B_j) J^{i\mu}_\nu = 0,$$

из которых следует, что уравнения структурного поля могут быть записаны в форме законов сохранения

$$\nabla_i J^{i\mu}_\nu = 0, \tag{27}$$

где

$$J^{i\mu}_\nu = (g^{il} H^j_{lk} - g^{jl} H^i_{lk}) E^k_\nu E^\mu_j, \quad H^i_{jk} = E^i_\mu (\partial_j E^\mu_k - \partial_k E^\mu_j).$$

Рассмотрим сразу же переход от статики к динамике. Лагранжиан структурного поля в динамике записывается в виде

$$\mathcal{L}_{sf} = \frac{1}{2} \overline{g}^{jk} H^l_{jm} H^m_{kl},$$

где $\overline{g}^{jk} = 2t^j t^k - g^{jk}$ есть вспомогательная метрика. Отсюда ясно, что при переходе от статики к динамике нужно в уравнениях структурного поля заменить ковариантную производную ∇_i, принадлежащую g^{jk}, на ковариантную производную $\overline{\nabla}_i$, принадлежащую $\overline{g}^{il}$. Однако известно, что $\overline{\nabla}_i J^{i\mu}_\nu = \nabla_i J^{i\mu}_\nu$. Поэтому просто полагаем

$$J^{i\mu}_\nu = t^i(\mathbf{t}, \mathbf{J}^\mu_\nu) + J^{i\mu}_\nu - t^i(\mathbf{t}, \mathbf{J}^\mu_\nu) = \rho^\mu_\nu t^i + S^{i\mu}_\nu$$

и записываем уравнения структурного поля в следующем виде:

$$\nabla_{\mathbf{t}}\rho^{\mu}_{\nu} + \varphi\rho^{\mu}_{\nu} + \nabla_i S^{i\mu}_{\nu} = 0, \tag{28}$$

где

$$J^{i\mu}_{\nu} = (\overline{g}^{il}H^{j}_{lk} - \overline{g}^{jl}H^{i}_{lk})E^{k}_{\nu}E^{\mu}_{j}, \quad H^{i}_{jk} = E^{i}_{\mu}(\partial_j E^{\mu}_{k} - \partial_k E^{\mu}_{j}).$$

Поясним связь выведенной системы уравнений с уравнениями (21). Вариационный принцип, строго говоря, вместо уравнений (26) дает уравнения, в правой части которых стоит не нуль, а $\dfrac{1}{\sqrt{g}}D_i(\sqrt{g}\mathbf{T}^i)$. Согласно уравнениям обобщенного электромагнитного поля это выражение равно нулю и поэтому в уравнения структурного поля не входят компоненты потенциала джефа. Джефстатика и джефдинамика — это геометризация теории Максвелла, одновременно являющаяся ее естественным обобщением, вытекающим из концепции физического многообразия. Таким образом, теория обобщенного электромагнитного поля является одним из результатов гипотезы геометризации. Интересно, что в работах Эйнштейна и других авторов предпринимались попытки связать электромагнитное поле со структурным полем, представляющим основное состояние джефа в принятой здесь терминологии.

Выведем уравнения структурного поля другим методом, идею которого подсказывает классическая механика. Пусть дан лагранжиан некоторой механической системы $L(q,\dot{q})$. Дифференцируя этот лагранжиан по времени, нетрудно вывести тождество

$$\frac{d}{dt}\left(L - \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right),$$

из которого следует, что если приравнять нулю выражение в скобках в правой стороне тождества, то выражение, стоящее в скобках в левой стороне тождества, будет интегралом движения. Таким образом, одновременно получаем и уравнения движения, и важный закон сохранения. Необходимость переноса рассмотренного метода вывода уравнений движения в теорию поля продиктован следующим обстоятельством. При рассмотрении уравнений Эйнштейна, описывающих в статике закон взаимодействия структурного поля с гравитационным полем, необходимо убедиться, что дивергенция тензора натяжений структурного поля на уравнениях этого поля равна нулю. Однако попытка проделать это непосредственно встречается с непреодолимыми трудностями, несмотря на кажущуюся простоту ситуации. Причина этого остается совершенно неясной.

Итак, берем ковариантную производную от нашего лагранжиана и получаем в качестве первого шага следующее тождество:

$$\nabla_m \mathcal{L}_{sf} = F^{jk}_{l}\nabla_m E^{l}_{\mu}\nabla_j E^{\mu}_{k} + F^{jk}_{l}E^{l}_{\mu}\nabla_m\nabla_j E^{\mu}_{k}.$$

Используя формулу для коммутатора ковариантных производных

$$\nabla_m \nabla_j E_k^\mu - \nabla_j \nabla_m E_k^\mu = -R_{mjk}^l E_l^\mu$$

и равенства

$$\nabla_m E_k^\mu = -E_l^\mu E_k^\nu \nabla_m E_\mu^l, \quad E_\mu^l \nabla_m E_k^\mu = B_{mk}^l,$$

представим второе слагаемое в правой стороне тождества в виде

$$F_l^{jk} E_\mu^l \nabla_m \nabla_j E_k^\mu = \nabla_j (F_l^{jk} B_{mk}^l) + \nabla_j (F_l^{jk} E_\mu^l) E_l^\mu E_k^\nu \nabla_m E_\mu^l - F_l^{jk} R_{mjk}^l.$$

Применяя формулу для коммутатора ковариантных производных к тензорному полю F_l^{jk} и учитывая тождество

$$R_{mjk}^l + R_{jkm}^l + R_{kmj}^l = 0,$$

придем к равенству

$$F_l^{jk} R_{mjk}^l = \nabla_j \nabla_k F_m^{jk}.$$

В результате исходное тождество примет вид

$$\nabla_m \mathcal{L}_{sf} = \nabla_j (\nabla_k F_m^{kj} - B_{mk}^l F_l^{kj}) - [L]_l^k B_{mk}^l,$$

где

$$[L]_l^k = \nabla_j F_l^{jk} - B_{jl}^n F_n^{jk} + B_{jn}^k F_l^{jn}$$

есть производная Лагранжа. Делая алгебраические преобразования, можно показать, что

$$\nabla_k F_m^{kj} - B_{mk}^l F_l^{kj} = [L]_m^j + g^{ij} H_{il}^k H_{mk}^l.$$

Окончательный результат записывается в виде тождества

$$\nabla^i (g_{ij} [L]_m^j + H_{il}^k H_{mk}^l - g_{im} \mathcal{L}_{sf}) = [L]_l^k B_{mk}^l.$$

В силу этого тождества приходится оставить идею о том, чтобы структурное поле отождествить с гравитационным полем, так как тогда из уравнений

$$\nabla^i (g_{ij} [L]_m^j + H_{il}^k H_{mk}^l - g_{im} \mathcal{L}_{sf}) = 0$$

будут следовать уравнения $[L]_l^k B_{mk}^l = 0$. Из полученного тождества становится ясной и причина той трудности, о которой говорилось выше. Появление выражения вида $\nabla_j [L]_m^j$ трудно предвидеть заранее.

Рассмотрим синглетное состояние в джефстатике. Если напряженность джефа инвариантна относительно всех преобразований джефсимметрии, то определяемое этим условием состояние называется синглетным:

$$\mathbf{H}_{ij} \mathbf{S} = \mathbf{S} \mathbf{H}_{ij},$$

и поскольку $\mathbf{S}$ — произвольный элемент рассматриваемой группы внутренней симметрии, то синглетное состояние должно удовлетворять также уравнениям

$$\mathbf{H}_{ij} = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\mathbf{H}_{ij}\mathbf{E}.$$

Эти уравнения имеют решение

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{L}_i + A_i\mathbf{E},$$

где $\mathbf{L}_i$ — произвольное основное состояние и A_i — произвольное ковекторное поле. Так как $\mathrm{Tr}\,\mathbf{P}_i = \partial_i \ln\, q + nA_i$, где $q = \mathrm{Det}(E_i^\mu)$, то

$$\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\mathbf{H}_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = F_{ij}.$$

Рассмотрим закон преобразования величины, равной следу от потенциала джефа. Положим $B_i = \mathrm{Tr}\mathbf{P}_i = P_{ik}^k$. Согласно (5) и правилу дифференцирования определителей, закон преобразования для B_i имеет вид

$$\overline{B}_i = B_i - \partial_i ln|\bigtriangleup|,$$

где $\bigtriangleup = \mathrm{Det}(S_j^i)$. Таким образом, след потенциала джефа испытывает градиентные преобразования, которые образуют абелеву группу. Для полноты картины рассмотрим также вопрос о законе преобразования B_i при произвольных преобразованиях координат. Из (4) следует, что этот закон имеет вид

$$\tilde{P}_i = (P_m - \partial_m ln|J|)\frac{\partial u^m}{\partial \tilde{u}^i},$$

где $J = \left|\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial u}\right|$ есть якобиан преобразования. Здесь обращает на себя внимание то, что обычному преобразованию, присущему ковекторному полю, предшествует градиентное преобразование.

Найдем уравнения, которым подчиняется тензор F_{ij}. Беря в уравнениях (9) и (10) след, получаем две группы уравнений

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}F^{ij}) = 0, \quad \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0, \tag{29}$$

которые полностью определяют синглетное состояние в джефстатике и с некоторыми уточнениями, о которых речь ниже, в джефдинамике. В джефстатике размерность физического пространства равна трем и система уравнений (28) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}V^i) = 0, \quad \partial_i V_j - \partial_j V_i = 0, \quad V^i = \frac{1}{2}e^{ijk}F_{jk}.$$

Отсюда заключаем, что в данной ситуации синглетное состояние представлено гармоническим вектором. Гармонические векторы существуют не всегда, и, например, на трехмерной сфере единственным решением рассматриваемых уравнений будет тривиальное решение. В джефдинамике размерность физического пространства равна четырем, присутствует поле времени как естественный атрибут динамики, определена скорость изменения со временем физических полей, что позволяет рассматривать физическое поле как сущность, переносящую энергию и импульс. Докажем, что в этом случае из уравнений (29) выводятся уравнения Максвелла.

7. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Переход от уравнений джефстатики к уравнениям джефдинамики формально осуществляется увеличением размерности физического пространства и простой заменой римановой положительно определенной метрики на вспомогательную метрику, определенную выше. Вспомогательная метрика естественным образом вводит две величины, объединенные двухсторонней симметрией. Физический смысл указанных действий состоит в переходе к уравнениям, описывающим динамические процессы. Вывод этих уравнений является главной задачей джефдинамики. Причинная структура уравнений в явном виде выступает в форме оператора эволюции, который и составляет главное отличие уравнений джефстатики от уравнений джефдинамики. В соответствии с этим замечанием основной лагранжиан джефдинамики записывается в виде

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\mathbf{H}_{ij}\overline{\mathbf{H}}^{ij}), \tag{30}$$

где

$$\overline{\mathbf{H}}^{ij} = \overline{g}^{ik}\overline{g}^{jl}\mathbf{H}_{kl} = 2t^i\mathbf{J}^j - 2t^i\mathbf{J}^j + \mathbf{H}^{ij}, \quad \mathbf{J}_i = t^k H_{ik}.$$

Уравнения для тензора синглетного состояния джефа F_{ij} удобно записать тогда в следующей, эквивалентной исходной, форме:

$$\nabla_i \overset{*}{F}{}^{ij} = 0, \quad \nabla_i \overline{F}^{ij} = 0, \tag{31}$$

где

$$\overset{*}{F}{}^{ij} = \frac{1}{2}e^{ijkl}F_{kl}, \quad \overline{F}^{ij} = F_{kl}\overline{g}^{ik}\overline{g}^{jl} = 2t^iE^j - 2t^jE^i + F^ij, \quad E_i = t^kF_{ik},$$

и e^{ijkl} есть контравариантные компоненты тензора Леви-Чивиты, нормированного, как обычно, на определитель гравитационного потенциала, $e_{1234} = \sqrt{g}$. Для вывода уравнений Максвелла из уравнений (22) предварительно установим основные соотношения векторной алгебры и векторного анализа на четырехмерном физическом многообразии, которые важны и сами по себе, так как являются естественным обобщением обычных векторной алгебры и векторного анализа, продиктованным новой концепцией времени.

Скалярное произведение двух векторных полей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определяется римановой метрикой (1), как и ранее, $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = g_{ij} A^i B^j$. Векторное произведение $\mathbf{C} = [\mathbf{AB}]$ двух векторных полей строим следующим образом:

$$C^i = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]^i = e^{ijkl} t_j A_k B_l.$$

Здесь вполне отчетливо видно, каким образом поток времени позволяет перенести обычную векторную алгебру и анализ с трехмерных многообразий на четырехмерные многообразия. Очевидно, что $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] + [\mathbf{B} \times \mathbf{A}] = 0$. Прямыми вычислениями проверяются основные соотношения векторной алгебры

$$|[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \varphi, \quad [\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

С геометрической точки зрения векторное произведение — это отображение, которое каждой паре векторных полей ставит в соответствие векторное поле, ортогональное потоку времени. Это векторное поле касается пространственного сечения в каждой его точке.

Дифференциальные операторы векторного анализа определяются также естественно. Для дивергенции и градиента имеем, соответственно,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} A^i), \quad (\operatorname{grad} \phi)^i = (g^{ij} - t^i t^j) \partial_j \phi = g^{ij} \partial_j \phi - t^i D_t \phi$$

и, как следствие,

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j \phi) - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} t^i \nabla_{\mathbf{t}} \phi) = \nabla_i \nabla^i \phi - \nabla_i (t^i \nabla_{\mathbf{t}} \phi).$$

Ротор векторного поля $\mathbf{A}$ определяется как векторное произведение ∇ и $\mathbf{A}$:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})^i = [\nabla \times \mathbf{A}] = e^{ijkl} t_j \partial_k A_l = \frac{1}{2} e^{ijkl} t_j (\partial_k A_l - \partial_l A_k).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0.$$

Очевидно, что все операции векторной алгебры общековариантны. Введем полярный и аксиальный ковекторы соотношениями

$$E_i = t^k F_{ik}, \tag{32}$$

$$H_i = t^k \overset{*}{F}_{ik}, \tag{33}$$

где $\overset{*}{F}_{ij} = g_{ik}g_{jl}\overset{*}{F}{}^{kl}$. Очевидно, что эти ковекторы ортогональны потоку времени

$$t^i H_i = t^i E_i = 0.$$

Разрешая уравнения (32), (33) относительно F_{ik}, получаем

$$F_{ij} = -t_i E_j + t_j E_i - \varepsilon_{ijkl} t^k H^l. \tag{34}$$

Это соотношение можно рассматривать как отображение, задаваемое градиентом поля времени, которое полярному и аксиальному ковекторам ставит в соответствие кососимметричное тензорное поле. Это отображение инвариантно относительно преобразований

$$E_i \Rightarrow E_i + \lambda t_i, \quad H_i \Rightarrow H_i + \mu t_i,$$

поэтому в любом случае условие ортогональности потоку времени выполняется, и при этом условии рассмотренное отображение является взаимнооднозначным. Из (19) следует, что

$$\overset{*}{F}{}^{ij} = -t^i H^j + t^j H^i - e^{ijkl} t_k E_l, \quad \overline{F}^{ij} = t^i E^j - t^j E^i - e^{ijkl} t_k H_l. \tag{35}$$

Подставляя (35) в (22), получаем динамические уравнения для введеных полей в следующей общековариантной форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{\sqrt{g}} D_t(\sqrt{g}\mathbf{H}), \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{g}} D_t(\sqrt{g}\mathbf{E}). \tag{36}$$

Из уравнений (36) следует, что

$$D_t(\partial_i(\sqrt{g}H^i)) = 0, \quad D_t(\partial_i(\sqrt{g}E^i)) = 0,$$

и поэтому динамические уравнения совместны со связями. Из этих же уравнений выводится, что

$$D_t(\sqrt{g}t_i E^i) = 0, \quad D_t(\sqrt{g}t_i H^i) = 0,$$

и, следовательно, ортогональность потоку времени можно рассматривать как начальное условие. Выведенные уравнения являются уравнениями Максвелла для напряженностей электрического и магнитного полей. Таким образом, гипотеза геометризации позволяет дать дедуктивный вывод фундаментальных уравнений физики, что свидетельствует в пользу этой гипотезы и новой концепции времени. Из формулы для тензора энергии-импульса джефа нетрудно получить выражение для компонент тензора энергии-импульса его синглетного состояния в терминах напряженностей электрического и магнитного полей:

$$T_{ij} = \frac{1}{2} g_{ij}(|E|^2 + |H|^2) - E_i E_j - H_i H_j - t_i \Pi_j - t_j \Pi_i, \tag{37}$$

где Π_i есть ковариантные компоненты вектора потока энергии электромагнитного поля

$$\Pi^i = e^{ijkl} t_j E_k H_l, \quad \mathbf{\Pi} = [\mathbf{EH}].$$

Отсюда получаем выражение для плотности энергии электромагнитного поля

$$\varepsilon_m = t^i t^j T_{ij} = \frac{1}{2}(E^2 + H^2),$$

а также выражение для максвелловского тензора напряжений

$$M^i_j = \frac{1}{2} h^i_j (|E|^2 + |H|^2) - E^i E_j - H^i H_j.$$

Высочайшим статусом уравнений Максвелла подтверждается правильность общих определений, данных выше при построении гравидинамики.

Рассмотрим электромагнитное поле на фоне физического многообразия некоторой полной системы полей, которая характеризуется только тем, что скорость изменения гравитационного потенциала со временем пропорциональна гравитационному потенциалу, т.е. $D_{\mathbf{t}} g_{ij} = \frac{1}{2}\varphi g_{ij}$. В таком приближении, когда физическое многообразие является внешним по отношению к электромагнитному полю, для плотности энергии электромагнитного поля из уравнений Максвелла выводится следующее общековариантное уравнение:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} D_{\mathbf{t}}(\sqrt{g}\varepsilon_m) + \nabla_i \Pi^i = 0.$$

Это в точности закон сохранения энергии электромагнитного поля в указанном приближении, когда поток энергии гравитационного поля равен $G_j = -\frac{3}{2} h^i_j \partial_i \varphi$.

Таким образом, построена последовательная общековариантная теория взаимодействия света и гравитации, которая не вступает в противоречие с тем очевидным фактом, что электромагнитное поле состоит из двух полей: электрического и магнитного.

8. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИММЕТРИЯ

Пространственная симметрия представлена группой локальных диффеоморфизмов физического многообразия и приобретает важное значение при решении уравнений джефстатики и джефдинамики. Дадим соответствующие определения, согласованные с джефсимметрией. Группа джефсимметрии интранзитивна и разбивает множество потенциалов P_i на классы эквивалентности. Локальный диффеоморфизм также устанавливает отношение эквивалентности в множестве потенциалов следующим образом. Два потенциала $\widetilde{\mathbf{P}}_i$

и $\mathbf{P}_i$ будут эквивалентны, если существует такой локальный диффеоморфизм, что

$$\widetilde{P}^i_{jk}(u) = \varphi^i_l(u)(P^l_{mn}(u) f^m_j(u) f^n_k(u) + \partial_j f^l_k(u),$$

где

$$f^i_j(u) = \partial_j f^i(u), \quad \varphi^i_j(u) = \partial_j \varphi^i(u).$$

Локальный диффеоморфизм оставляет инвариантным класс эквивалентности, определяемый джефсимметрией, если некоторый элемент этого класса эквивалентности преобразуется локальным диффеоморфизмом в, вообще говоря, другой элемент того же класса эквивалентности. Отсюда следует, что должно быть

$$\tilde{\mathbf{P}}_j = \mathbf{S}\mathbf{P}_j\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S}\partial_j\mathbf{S}^{-1}$$

для любого $\mathbf{S}$. Запишем это уравнение в инфинитезимальной форме, полагая

$$\varphi^i(u) = u^i + s^i(u), \quad f^i(u) = u^i - s^i(u),$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} + \mathbf{U}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = (U^i_j).$$

После некоторых преобразований окончательный результат принимает такой вид:

$$\mathrm{D}_j\mathbf{W} + s^i\mathbf{H}_{ij} = \mathrm{D}_j\mathbf{U}, \quad \mathbf{W} = (W^i_j) = (\partial_j s^i + P^i_{kj}s^k).$$

Так как тензорное поле U^i_j может быть любым, то, не нарушая общности, можно положить $\mathbf{U} = \mathbf{W}$ и записать условие инвариантности потенциала джефа и его синглетного состояния относительно локальных диффеоморфизмов в следующей форме, явно инвариантной относительно преобразований джефсимметрии:

$$s^i\mathbf{H}_{ij} = 0, \quad s^iF_{ij} = 0. \tag{38}$$

Если потребовать, чтобы состояние джефа было инвариантно относительно всех локальных диффеоморфизмов, то должно быть

$$\mathbf{H}_{ij} = 0, \quad F_{ij} = 0.$$

Инвариантное состояние является основным состоянием джефа и рассматривалось выше.

Применим выведенные уравнения для нахождения состояния электромагнитного поля, инвариантное относительно вращений. Тройка векторных полей, определяющая группу вращений $O(3)$ в естественных координатах $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$, t имеет вид

$$\mathbf{s}_1 = (0,\, x^3,\, -x^2,\, 0), \quad \mathbf{s}_2 = (-x^3,\, 0,\, x^1,\, 0), \quad \mathbf{s}_3 = (x^2,\, -x^1,\, 0,\, 0).$$

Так как $\mathbf{t} = (0,\, 0,\, 0,\, 1,)$, выполняются соотношения

$$[\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3] = x^1\mathbf{r}, \quad [\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_1] = x^2\mathbf{r}, \quad [\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2] = x^3\mathbf{r},$$

где $\mathbf{r} = (x^1,\, x^2,\, x^3,\, 0)$. Векторы рассматриваемой тройки ортогональны радиусу-вектору и линейно связаны:

$$(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}) = (\mathbf{s}_2, \mathbf{r}) = (\mathbf{s}_3, \mathbf{r}) = 0, \quad x^1\mathbf{s}_1 + x^2\mathbf{s}_2 + x^3\mathbf{s}_3 = 0.$$

Из (38) для напряженностей электрического и магнитного полей получаем уравнение

$$(\mathbf{s},\, \mathbf{E})\mathbf{t} = (\mathbf{s},\, \mathbf{t})\mathbf{E} + [\mathbf{s} \times \mathbf{H}] = 0.$$

Если $(\mathbf{s},\, \mathbf{t}) = 0$, то отсюда следует, что должно быть

$$(\mathbf{s},\, \mathbf{E}) = 0, \quad [\mathbf{s} \times \mathbf{H}] = 0.$$

Таким образом, инвариантное относительно вращений состояние электромагнитного поля находится как решение системы уравнений

$$(\mathbf{s}_\mu,\, \mathbf{E}) = 0, \quad [\mathbf{s}_\mu \times \mathbf{H}] = 0, \quad \mu = 1,\, 2,\, 3.$$

Отсюда находим, что

$$\mathbf{E} = \alpha(r)\mathbf{r}, \quad \mathbf{H} = 0.$$

Если дивергенция напряженности электрического поля равна нулю, то отсюда легко находится, что $\alpha(r) = Cr^{-3}$, где C — постоянная. Отсюда следует, что магнитный заряд имеет отношение к основному состоянию электромагнитного поля, определяемому уравнением $F_{ij} = 0$. Общее решение этого уравнения обсуждалось при изложении спиндинамики.

9. ПРИЧИННАЯ СТРУКТУРА УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Вывод динамических уравнений обобщенного электромагнитного поля, раскрывающий причинную структуру этих уравнений, проведем, опираясь на схему рассуждений, примененную при выводе уравнений Максвелла. Начнем с уравнений (10), записанных в общековариантной форме. Положим

$$\overset{*}{\mathbf{H}}{}^{ij} = \frac{1}{2}e^{ijkl}\mathbf{H}_{kl}, \quad \overset{*}{\mathbf{H}}_{ij} = \frac{1}{2}e_{ijkl}\mathbf{H}^{kl}.$$

Тогда обсуждаемые уравнения записываются в виде

$$\nabla_i\overset{*}{\mathbf{H}}{}^{ij} + [\mathbf{W}_i, \overset{*}{\mathbf{H}}{}^{ij}] = 0.$$

Введем электрическую и магнитную напряженности обобщенного электромагнитного поля соотношениями

$$\mathbf{J}_i = t^k\mathbf{H}_{ik}, \quad \mathbf{M}_i = t^k\overset{*}{\mathbf{H}}_{ik},$$

$$\mathbf{H}_{ik} = -t_i\mathbf{J}_k + t_k\mathbf{J}_i - e_{ikjl}t^j\mathbf{M}^l.$$

Отсюда находим

$$\overset{*}{H}{}^{ij} = -t^iM^j + t^jM^i - e^{ijkl}t_kJ_l.$$

После подстановки этого выражения в исходные уравнения выводим такую общековариантную систему уравнений для напряженностей джефа:

$$\nabla_i\mathbf{M}^i + [\mathbf{W}_i, \mathbf{M}^i] = 0,$$

$$D_t\mathbf{M}^i + \varphi\mathbf{M}^i = -e^{ijkl}t_j(\nabla_k\mathbf{J}_l + [\mathbf{W}_k, \mathbf{J}_l]),$$

где

$$D_t\mathbf{M}^i = t^k\nabla_k\mathbf{M}^i + t^k[\mathbf{W}_k, \mathbf{M}^i] - \mathbf{M}^k\nabla_kt^i, \quad \varphi = \nabla_it^i.$$

Поскольку

$$\nabla_k\mathbf{J}_l + [\mathbf{W}_k, bfJ_l] = D_k\mathbf{J}_l - \Gamma^n_{kl}\mathbf{J}_n, \quad D_t\mathbf{M}^i = t^kD_k\mathbf{M}^i - \mathbf{M}^k\partial_kt^i,$$

$$\nabla_i\mathbf{M}^i + [\mathbf{W}_i, \mathbf{M}^i] = \frac{1}{\sqrt{g}}D_i(\sqrt{g}\mathbf{M}^i),$$

установленные уравнения могут быть представлены в следующем виде:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\mathrm{D}_i(\sqrt{g}\mathbf{M}^i) = 0,$$

$$t^k\mathrm{D}_k\mathbf{M}^i - \mathbf{M}^k\partial_kt^i + \varphi\mathbf{M}^i = -e^{ijkl}t_j\mathrm{D}_k\mathbf{J}_l.$$

Инвариантность этой группы уравнений относительно преобразований джеф-симметрии очевидна.

Перейдем к другой группе уравнений джефдинамики, которую можно записать в общековариантной форме следующим образом:

$$\overline{\nabla}_i\overline{\mathbf{H}}^{ij} + [\overline{\mathbf{W}}_i, \overline{\mathbf{H}}^{ij}] + \mu^2\overline{\mathbf{T}}^j = 0,$$

где

$$\overline{\mathbf{H}}^{ij} = \overline{g}^{ik}\overline{g}^{jl}\mathbf{H}_{kl}, \quad \overline{\mathbf{W}}_i = \mathbf{P}_i - \overline{\mathbf{\Gamma}}_i, \quad \overline{\mathbf{T}}^i = \overline{g}^{ik}\mathbf{T}_k.$$

Введение вспомогательного тензорного поля $\overline{g}_{ij}$ позволяет для вывода второй пары уравнений джефдинамики применить тот же метод, что и ранее. Важное значение фактически имеет только соотношение

$$\overline{\mathbf{H}}^{ij} = t^i\mathbf{J}^j - t^j\mathbf{J}^i - e^{ijkl}t_k\mathbf{M}_l$$

и разложение

$$\mathbf{T}_i = (\mathbf{T}_i - t_it^k\mathbf{T}_k) + t_it^k\mathbf{T}_k = \mathbf{S}_i + t_i\mathbf{S}.$$

Поэтому выпишем сразу конечный результат

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\mathrm{D}_i(\sqrt{g}\mathbf{J}^i) = \mu^2 S,$$

$$t^k D_k \mathbf{J}^i - \mathbf{J}^k \partial_k t^i + \varphi \mathbf{J}^i = e^i jklt_j \mathrm{D}_k \mathbf{J}_l + \mu^2 \mathbf{S}^i.$$

Введем операторы Rot и Div, полагая

$$\mathbf{J} = (\mathbf{J}^i), \quad \mathrm{Rot}\,\mathbf{J} = (e^{ijkl} t_j \mathrm{D}_k \mathbf{J}_l), \quad \mathrm{Div}\,\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{g}}\mathrm{D}_i(\sqrt{g}\mathbf{J}^i).$$

В принятых обозначениях полная система уравнений обобщенного электромагнитного поля принимает вид

$$\mathrm{D}_{\mathbf{t}}\mathbf{M} + \varphi\mathbf{M} = -\mathrm{Rot}\,\mathbf{J}, \quad \mathrm{Div}\,\mathbf{M} = 0, \quad t_i \mathbf{M}^i = 0, \tag{39}$$

$$\mathrm{D}_{\mathbf{t}}\mathbf{J} + \varphi\mathbf{J} = \mathrm{Rot}\,\mathbf{M} + \mu^2\mathbf{S}, \quad \mathrm{Div}\,\mathbf{J} = \mu^2\mathbf{S}, \quad t_i \mathbf{J}^i = 0. \tag{40}$$

Как видно, джефсимметрия вносит свои коррективы в определение оператора эволюции и этот оператор является различным для гравитационного поля, спинового поля и обобщенного электромагнитного поля, что, конечно, обусловлено тем, как вступает в игру геометрическая внутренняя симметрия, определяющая статус фундаментальных физических полей.

10. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ДРУГИМИ ПОЛЯМИ

Обобщенное электромагнитное поле взаимодействует с гравитационным полем. Взаимодействие джефа со спиновым полем может происходить только по каналу, определяемому лагранжианом

$$\mathcal{L}_{int} = qB_i C^i, \quad B_i = \mathrm{Tr}\,\mathbf{P}_i.$$

Такое взаимодействие выглядит неестественным, так как, беря след от модифицированных уравнений обобщенного электромагнитного поля, получим, что спиновое поле фактически взаимодействует с синглетным состоянием джефа. Вывод состоит в том, что теорию обобщенного электромагнитного поля нужно построить так, чтобы синглетное состояние джефа выступало как независимое поле. Это, действительно, можно осуществить следующим образом. Вводим в рассмотрение тензорное поле

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{H}_{ij} - \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\,\mathbf{H}_{ij},$$

след которого очевидно равен нулю. Таким образом, необходимо для модифицированного тензора напряженности получить такие же уравнения, как и для тензора напряженности $\mathbf{H}_{ij}$. Для этого нужно к лагранжиану (14) добавить слагаемое

$$\mathcal{L}_{ad} = \frac{1}{4n}\mathrm{Tr}\,\mathbf{H}_{ij}\mathrm{Tr}\,\mathbf{H}^{ij}.$$

Варьируя модифицированный лагранжиан, получаем уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\mathrm{D}_i(\sqrt{g}\mathbf{G}^{ij}) = {}^2\mathbf{T}^j,$$

которые по форме не отличаются от уравнений (15), но из которых следует, что след от тензора $\mathbf{T}^j$ должен равняться нулю. Таким образом, скрытый тяжелый свет взаимодействует только гравитационно.

Выпишем теперь в окончательной форме динамические уравнения обобщенного электромагнитного поля и его синглетного состояния, но с учетом взаимодействия поля Фарадея–Максвелла со спиновым полем. Уравнения обобщенного электромагнитного поля

$$\mathrm{D}_{\mathbf{t}}\mathbf{M} + \varphi\mathbf{M} = -\mathrm{Rot}\,\mathbf{J}, \quad \mathrm{Div}\,\mathbf{M} = 0, \quad t_i\mathbf{M}^i = 0, \quad \mathrm{Tr}\,\mathbf{M} = 0, \quad \mathrm{Tr}\,\mathbf{J} = 0,$$

$$\mathrm{D}_{\mathbf{t}}\mathbf{J} + \varphi\mathbf{J} = \mathrm{Rot}\,\mathbf{M} + \mu^2\mathbf{S}, \quad \mathrm{Div}\,\mathbf{J} = \mu^2\mathbf{S}, \quad t_i\mathbf{J}^i = 0.$$

Уравнения Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{\sqrt{g}}D_t(\sqrt{g}\mathbf{H}), \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0, \quad (\mathbf{t},\mathbf{H}) = 0,$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{g}}D_t(\sqrt{g}\mathbf{E}) + \mathbf{J}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \rho, \quad (\mathbf{t},\mathbf{E}) = 0,$$

где

$$\rho = t_iC^i, \quad J^i = C^i - t^i(\mathbf{t},\mathbf{C})$$

суть соответственно плотность и физический ток спинового поля.

Важное замечание. В результате включения взаимодействия обобщенного электромагнитного поля с его основным состоянием нарушается инвариантность уравнений джефстатики и джефдинамики относительно преобразований джефсимметрии. При этом все важные с физической точки зрения величины остаются инвариантными относительно преобразований джефсимметрии. Это явление можно назвать естественным нарушением джефсимметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saslay W. C.* Gravitational Physics of Stellar and Galactic Systems. Cambridge University Press, 1987.

2. *Pavon D., Zimdahl W.* // Phys. Lett. A. 1993. V. 179.

3. Particle Data Group // Phys. Lett. B. 1990. V. 239. P. 3.

4. *Krawczyk M.* // Nucl. Phys. B. (Proc. Suppl.). 2008. V. 184. P. 8.

Получено 20 декабря 2012 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 05.03.2013.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,94. Уч.-изд. л. 2,3. Тираж 325 экз. Заказ № 57931.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/