Р4-2017-97

О. С. Космачев *

ЦЕЛОСТНОЕ ОПИСАНИЕ ЛЕПТОННОГО СЕКТОРА

Направлено в журнал «ЭЧАЯ»

* E-mail: kos@theor.jinr.ru

Космачев О. С. P4-2017-97
Целостное описание лептонного сектора

Целостное описание означает единый алгоритмический подход к формированию уравнений для лептонного сектора. На основе теоретико-группового анализа уравнений Дирака (1928 г.), Паули (1932 г.) и Майораны (1937 г.) была установлена последовательность действий, необходимая для формулировки свободных лептонных уравнений. Данная последовательность действий называется алгоритмом Дирака. Найдено обобщение алгоритма Дирака для нестабильных лептонов. В результате получено три типа уравнений. Два уравнения связаны с нестабильными заряженными лептонами $(\mu^{\pm}, \tau^{\pm})$, третье — с массивным нестабильным нейтрино. Лоренц-инвариантность и ковариантность записи нестабильных уравнений выполняются с той же степенью строгости, как для уравнения Дирака. Одним из следствий развитого нами подхода явилось обнаружение индивидуальной структуры каждого лептонного уравнения. Другие следствия учета структуры: предсказывается существование нестабильного массивного нейтрино, а также «двойников» у $\tau^{\pm}$-лептонов, т. е. $(\tau^{*})^{\pm}$-лептонов, сложилась первичная структурная классификация лептонов.

Работа выполнена в Лаборатории физики высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2017

Kosmachev O. S. P4-2017-97
Holistic Description of the Lepton Sector

A holistic description means a single algorithmic approach to the formation of the equations for the lepton sector. The sequence of the actions required for formulation of free lepton equations was established on the basis of group-theoretical analysis of the Dirac (1928), Pauli (1932) and Majorana (1937) equations. The given sequence of actions is called below the Dirac algorithm. A generalization of the Dirac algorithm was found for unstable leptons. As a result, we obtained three types of equations. Two of them are connected with the unstable charged leptons $(\mu^{\pm}, \tau^{\pm})$, the third is connected with a massive unstable neutrino. Lorentz invariance and the covariance of the unstable equation recording are performed with the same degree of rigor as for the Dirac equation. One of the consequences of the developed by us approach was the discovery of the individual structure of each lepton equation. Other consequences of taking into account the structure of the leptons are as follows: the existence of massive unstable neutrino is predicted; the existence of “doublets” for $\tau^{\pm}$-leptons, i.e. $(\tau^{*})^{\pm}$-leptons, is predicted; a primary structural classification of leptons was made up.

The investigation has been performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Лептонный сектор занимает выделенное положение в физике частиц по той причине, что все нестабильные элементарные частицы в конечном итоге распадаются на немногочисленные стабильные лептоны. К ним следует добавить два не-лептона — стабильный фотон и практически стабильный протон. В последнее время интерес к лептонному сектору был значительно усилен его нейтринным сегментом. Можно сказать, что нейтринное семейство явилось узловой точкой, где сошлись проблемы физики частиц, астрофизики и космологии. В то же время понятно, что ограничиться изучением отдельно взятого нейтринного сегмента по некоторым причинам контрпродуктивно.

Вся полнота свойств и квантовые числа частиц проявляются через их взаимодействия и никак иначе. Поэтому вся индивидуальность частиц определяется их окружением. Например, такая важнейшая характеристика электронов, как электрический заряд, отсутствует в свободном уравнении Дирака. Для его обнаружения требуется электромагнитное поле. Отклик электрона на электромагнитное поле заложен в свойствах γ-матриц уравнения Дирака. С точки зрения полноты и цельности описания взаимодействий нет оснований делать исключение для нейтрино.

На сегодняшний день генезис всех типов нейтрино связывается с распадами нестабильных частиц и, в первую очередь, нестабильных лептонов. Более того, название и реальное «содержание» таких объектов, как ν_μ и ν_τ, прямо связывается с распадами μ- и τ-лептонов. Отсюда естественно возникает вопрос о связи структуры нестабильных лептонов со структурой продуктов их распадов. Здесь и далее под реальным «содержанием с точки зрения эксперимента» будем понимать свойства и квантовые числа, которые мы приписываем конкретным реальным частицам после их взаимодействий того или иного вида, включая распады. Конкретные частицы тогда и только тогда можно считать реально существующими, если они чем-либо отличаются от всех остальных. В противном случае они тождественны каким-то уже установленным и существующим, либо они относятся к неизвестным вместе со своими неизвестными структурами. В теории имеется единственная возможность описывать индивидуальные отличия различных частиц — соотносить им индивидуальные структуры того или иного вида.

Выяснилось, что в описании лептонов, которое представлено классическими трудами Дирака [1], Паули [2] и Майораны [3], данное требование выполняется, если под структурой понимать структуру группы каждого из волновых уравнений, которые однозначно устанавливаются в цитируемых работах. В каждой из трех названных статей структурными составляющими уравнений стабильных лептонов являются четыре компонента связности однородной группы Лоренца в различных сочетаниях. Они же являются максимальными инвариантными подгруппами, на основе которых формируются выражения для токов. Для нестабильных лептонов, как будет показано ниже, максимальными инвариантными подгруппами являются подгруппы стабильных лептонов, которые входят в состав каждой группы нестабильных лептонов также в неповторяющихся сочетаниях. Таким образом, в лептонном секторе релятивизм (точнее, все четыре компонента связности группы Лоренца) является исходным структурообразующим фактором. Значимость структурного анализа усиливается тем обстоятельством, что на практике присутствие нейтрино среди конечных продуктов реакций устанавливается методом недостающей энергии (missing energy). При этом исключена прямая фиксация типа нейтрино, в силу чего метод не свободен от дополнительных предположений. Поэтому возникает необходимость самосогласованного описания всего лептонного сектора в целом. Важным этапом для достижения данной цели и последующего развития является изучение распадов нестабильных лептонов на стабильные с учетом структуры как нестабильных, так и стабильных лептонов.

Можно показать, что структура — это инвариантная характеристика, позволяющая отличать одно лептонное уравнение от другого и, в конечном итоге, различать те наблюдаемые лептоны, которые мы связываем с соответствующими свободными уравнениями. Исходные различия свободных состояний (бра- и кет-скобок матричного элемента) служат в последующем более полному и точному описанию взаимодействий между частицами.

Подобная постановка вопроса вызывает необходимость детализировать понятие свободная частица (бра- и кет-векторы состояний). В уравнениях свободных состояний квантовые числа не присутствуют в явном виде. Для экспериментаторов они являются удобным способом маркировки результатов малочастичных реакций. С точки зрения теории квантовые числа необходимо связывать с индексами представлений групп частиц, участвующих во взаимодействии [4]. Поэтому формулировка свободных состояний должна основываться, в первую очередь, на нескольких фундаментальных принципах, одинаково приемлемых для всех взаимодействующих частиц. В классе лептонных уравнений таковыми являются требование лоренц-инвариантности и ковариантности записи уравнения свободного состояния, возможность вероятностной интерпретации волновой функции и требования корпускулярно-волнового дуализма. Далее следуют требования, общие для некоторого класса рассматриваемых частиц. В лептонном секторе таковым является спин лептонов, равный 1/2.

Строгое следование названным требованиям исключает такого типа ошибки, когда результат какого-либо взаимодействия приписывается свободному состоянию частицы. Свободные состояния должны быть универсальными в том смысле, что с них должно начинаться описание любых взаимодействий для изучаемой частицы и, в конечном итоге, отражать ее структурную индивидуальность в результате взаимодействий.

Существование нейтрино типа ν_e исторически связано с изучением распада нейтрона. Структурный анализ такого процесса свидетельствует в пользу представлений о том, что структуру адронов и лептонов можно формулировать на единой основе. Еще в большей мере этому способствует изучение распадов τ-лептонов, где имеются каналы распадов чисто лептонные, чисто адронные и смешанные. Данные обстоятельства делают актуальным изучение структуры лептонного сектора в целом. Как следствие, возникает вопрос о возможности самосогласованного описания лептонов и адронов (через составляющие адронов — кварки) на последовательно релятивистской основе, как это имеет место в лептонном секторе. Необходимо отметить, что структуры лептонных уравнений не привносятся в уравнения искусственно, но возникают автоматически с момента написания названных уравнений как следствие выполнения общих, предварительно оговоренных требований. Их невозможно отменить, но следует учитывать.

Дискуссионный вопрос о сохранении или несохранении лептонных чисел не может рассматриваться в отрыве от вопроса о том, каково их происхождение или какими подструктурами они представлены в математическом формализме. Можно показать [5], что каждое из уравнений, найденное в работах [1–3], полностью определяется своей собственной группой. Эти три группы не изоморфны между собой.

Четыре компонента связности группы Лоренца в явном виде можно получить путем анализа состава группы уравнения Дирака [1] и состава группы уравнения Паули [2] для двухкомпонентного безмассового нейтрино. Что касается единственной работы Майораны [3] по нейтринной теме, то здесь необходимы некоторые оговорки. Статья была переиздана к столетнему юбилею со дня рождения Майораны в журнале ЭЧАЯ [6]. (Далее цитаты будут приводиться со ссылкой именно на этот перевод с итальянского). С помощью искусственного, частного приема Майорана преобразовал уравнение Дирака к другому уравнению. Известно, что оно описывает массивные электрически нейтральные частицы. Особенность уравнения такова, что в отличие от уравнения Дирака все четыре генератора группы Майораны (т. е. γ-матрицы четвертого порядка) допускают преобразование, при котором они все переходят в матрицы с действительными элементами. Данное уравнение для нейтральных лептонов далее будем называть уравнением Майораны.

Дальнейшие, наиболее обсуждаемые построения Майорана выполнил с помощью «вивисекции» вектора состояния, т. е. разделения его на чисто вещественную и чисто мнимую части $\Psi = U + iV$, без какого-либо обоснования принципиальной возможности такого акта. Далее он пришел к следующему выводу: «Преимуществом такого описания по сравнению с элементарной интерпретацией уравнений Дирака является, как мы увидим вскоре, то, что в нем нет никаких оснований предполагать существование антинейтронов или антинейтрино...» ([6], с. 247, 15 стр. снизу).

Известно, что заключение относительно антинейтрона не оправдалось. Сейчас детальный анализ выводов не имеет смысла. Достаточно оценок современников Майораны, имеющих отношение к обсуждаемому вопросу [7,8]. Они были опубликованы без прямой адресации к его работе потому, что они носят общий характер.

1. П. Дирак: «Наши векторы и со-векторы являются комплексными числами, так как их можно умножать на комплексные числа, после чего их природа не меняется, однако, они являются комплексными величинами особого рода, которые **не могут быть*** разбиты на чисто вещественную и чисто мнимую части» ([7], с. 39, 3 стр. сверху).

2. Е. Кондон, Г. Шортли: «Различие между Ψ и $\overline{\Psi}$ более фундаментально, чем между обычными комплексно-сопряженными величинами; операция разбиения Ψ на вещественную и мнимую части **не имеет никакого смысла**» ([8], с. 20, 3 стр. снизу).

Таким образом, построения на основе разделения вектора состояния на вещественную и мнимую части нельзя считать обоснованными, во всяком случае для лептонного сектора, а конечные выводы нельзя считать законченными и во всем приемлемыми. При том, что волновое уравнение, с которого начинается работа Майораны, удовлетворяет требованиям квантовой теории, релятивизма и корпускулярно-волнового дуализма, а идея истинно нейтральных частиц себя оправдала вне лептонного сектора (фотоны, π_0-мезоны).

Технический прогресс и связанные с ним экспериментальные возможности получения информации по всему комплексу вопросов, имеющих отношение к физике частиц, а также успехи смежных областей знаний привели к тому, что теоретическая мысль отстала от нарастающего потока непредвиденной информации. Так, темной материи не нашлось места в системе наших представлений по физике элементарных частиц, так же как нет ясности в вопросе о происхождении асимметрии материя–антиматерия в наблюдаемой части Вселенной.

Не менее простыми для понимания выглядят проблемы релятивистской ядерной физики. Удивительное многообразие конечных продуктов единич-

*Полужирный в цитатах наш. — *О. К.*

ного акта столкновения тяжелых ионов носит явно выраженный неравновесный характер, как минимум в первоначальной фазе этого многостадийного процесса. Последующая структурная эволюция вновь образовавшегося вещества (имеются основания называть его лептон-фотонной протоплазмой), предшествующая конечному наблюдаемому результату, возможна только в неравновесных системах. Поэтому вопрос о составе и свойствах протоплазмы, как ключевой и менее исследованный, выдвигается на первый план. Возникающее при этом экстремальное состояние материи характеризуется наиболее глубоким расщеплением элементарных частиц и формированием среды, в которой размываются такие понятия, как массовая поверхность, структурный состав частиц и их свойства. То есть тех частиц, которые мы умеем описывать в среде под названием вакуум. В экстремальном состоянии материи, где происходят процессы диссипации энергии, в общем случае становится неприменимым метод Лагранжа, сокращаются возможности его приложений, теряются надежность и эффективность моделей на его основе.

Поэтому одним из условий самосогласованного описания протоплазмы, которая одинаково годится для самоорганизации (грубо говоря, для процессов, обратных распадам) как лептонов, так и адронов, является описание структуры лептонов и кварков на единой релятивистской основе. Кроме того, поскольку речь идет о формировании более сложных структур на основе более простых, здесь невозможно обойтись без обращения к теории типа пригожинской динамики неравновесных систем. Ее синтез с дираковской физикой элементарных частиц послужит основой для формирования кинетики элементарных частиц. Полноценная формулировка и последующая разработка подобной комплексной программы представляет собой чрезвычайные трудности, так как они затрагивают фундаментальные основы современной физики микромира.

Следует также отметить, что в физике частиц сложилось странное положение даже без учета проблемных направлений, упомянутых выше. С одной стороны, принято считать, что Стандартная модель (СМ) описывает все известные свойства элементарных частиц [11–13]. С другой стороны, давно звучат утверждения, что СМ «имеет недостатки», «она не совсем удовлетворительна», «она неполна». Расплывчатость критических замечаний, по-видимому, свидетельствует о том, что недостатки СМ скрыты глубоко в ее основах.

Раздвоенность в оценке положения дел в СМ породила множество моделей, число которых в лептонном секторе превосходит число лептонов. Многочисленные и потому гипнотизирующие успехи СМ поддерживают попытки ее дальнейшего использования в рамках ее основ. Такого рода деятельность неизбежно ведет к росту явных или скрытых предположений и к дополнительным свободным параметрам. Главное, что при этом неизбежно наследуются недостатки СМ и при этом обесцениваются многочисленные модификации на ее основе. Сама СМ в условиях напластования феноменологических предположений рискует превратиться в наукоемкую систему параметризации экспериментальных результатов. Тех результатов, которые планируются и проводятся согласно предписаниям СМ.

Совокупность имеющихся результатов и общие соображения говорят о необходимости учета структуры частиц, взаимодействия которых мы собираемся изучать. Кроме того, сформировалась необходимость выявить возможности структуры частиц и придерживаться того, что называется внемодельными построениями. Термин получил хождение, хотя трудно возражать психологам, которые утверждают, что человеческий мозг занят только тем, что строит модели внешнего мира. На самом деле речь идет о немногих предположениях, которые составляют основу всякой теоретической схемы. В нашем случае — о минимуме предположений, без которого невозможно построение уравнений для лептонов, и максимуме выводов, которые можно получить на их основе. Такие качественные результаты, как состав и содержание максимального числа полученных уравнений, при сравнении с имеющимися экспериментальными данными составляют факты, которые невозможно отрицать и не учитывать при дальнейших исследованиях.

Данный обзор представляет собой попытку построения теории, в которой названное требование является стержнем содержания. Это означает фиксацию исходных предположений таким образом, что все последующие построения не выходят за их рамки, и формулировку единого алгоритмического подхода на основе унифицированного математического формализма. Фактически единый алгоритм был извлечен с помощью теоретико-группового анализа уравнения Дирака из его основополагающей работы [1]. Поэтому алгоритм естественно называть алгоритмом Дирака. Характерно, что алгоритм был предложен без апелляции к лагранжеву формализму, а уравнения Паули [2] и Майораны [3] явились результатом необходимых и допустимых вариаций алгоритма по сравнению с уравнением для электрона. В нашем подходе необходимость таких изменений диктуется и разграничивается строгими теоретико-групповыми требованиями.

Следствием выполненного анализа и последующих построений явилось целостное описание лептонного сектора, которое включает в себя описание свободных уравнений для массивных и безмассовых, заряженных и нейтральных, стабильных и нестабильных лептонов. Установлено наличие индивидуальной структуры каждого лептонного уравнения, которая является основой для наблюдаемых различий между лептонами. Далее будет показано, что полученный набор лептонных уравнений является полным и замкнутым. Полнота в данном случае означает, что невозможно дополнить число полученных лептонных уравнений, не выходя за рамки зафиксированных исходных предположений. Замкнутость означает, что нет недостатка в каких-либо алгебраических конструкциях для того, чтобы обеспечить структурную индивидуальность каждого из всех ранее известных и вновь полученных уравнений. В конечном итоге все они строятся из четырех компонентов связности группы Лоренца за счет изменения структуры группы или усложнения ее состава.

Отметим также, что алгоритм Дирака основан на весьма общих требованиях. Среди них можно выделить те, которые являются обязательными для частиц любого типа. К ним относятся: принцип корпускулярно-волнового дуализма, лоренц-инвариантность волновых уравнений и ковариантность записи их формы, возможность вероятностной интерпретации волновой функции на основе сохраняющегося 4-вектора тока вероятности, неприводимость представлений групп уравнений как обобщение метода Лагранжа–Эйлера для группового подхода. Неприводимость представлений групп уравнений является непременным требованием на каждом из этапов построения любого уравнения. Далее необходимо указать общие свойства для всего семейства изучаемых частиц. В случае лептонов таковым является спин, равный 1/2. Выбор остальных, частных, характеристик типа стабильность или нестабильность и других однозначно определяется выше названными обязательными требованиями и теоретико-групповыми закономерностями.

Принятый набор требований оказался минимальным и одновременно достаточным для вывода целого ряда лептонных волновых уравнений. Общность требований создает предпосылки для распространения алгоритма Дирака на калибровочные бозоны, кварки и далее на адронный сектор при учете дополнительных симметрий.

1. АЛГОРИТМ ДИРАКА

Теория элементарных частиц в ее сегодняшнем понимании началась со статьи Дирака [1]. Исключительная значимость и непреходящий успех теории Дирака связаны с фундаментальностью ее основ. По этой причине дираковский алгоритм построения уравнений первой степени по пространственно-временным производным был успешно использован сначала Паули, а затем Майораной для описания нейтральных лептонов. Одна из важных задач для нас — распространение методики Дирака на нестабильные лептоны [9, 10].

Упоминавшийся выше алгоритм Дирака строится на пяти исходных предположениях:

1. Уравнения должны быть инвариантны относительно группы Лоренца с учетом четырех компонентов связности и ковариантности формы записи уравнения.

2. Уравнения должны формулироваться на основе неприводимых представлений групп, определяющих каждое лептонное уравнение.

3. 4-Вектор тока вероятности должен быть сохраняющейся величиной при положительно определенном четвертом компоненте тока.

4. Величина спина лептонов предполагается равной 1/2.

5. Каждое лептонное уравнение первого порядка по пространственно-временным производным должно редуцироваться к уравнению типа Клейна–Фока–Гордона (KFG), которое описывает распространение волн де Бройля для квантовых частиц.

Наличие четырех компонентов связности обеспечивает учет основных дискретных преобразований по отношению к собственному представлению группы Лоренца: (P) — пространственной инверсии, (T) — обращения времени, (PT) — совместного действия двух преобразований. Требование неприводимости представлений групп в данном подходе является обобщением принципа наименьшего действия на групповом языке. Ограничение спина лептонов, равного 1/2, ведет к тому, что элементы группы каждого лептонного уравнения имеют порядок два или четыре в инфинитезимальном формате подгруппы $Sl(2, c)$, вложенной в группы лептонных уравнений. Удовлетворять уравнению первого порядка по четырем производным $(\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ совместно с требованием положительной определенности четвертого компонента тока вероятности означает описание наблюдаемой релятивистской частицы в обычном квантово-механическом смысле и сохранение вероятностной интерпретации волновой функции. Возможность при этом редукции к уравнению KFG означает, что частица обладает волновыми свойствами. Совместное выполнение двух требований — существования линейных уравнений первого порядка по производным и их редукции к уравнению типа KFG — является прямым следствием и реализацией корпускулярно-волнового дуализма. При переходе от уравнений первого порядка к уравнениям второго порядка KFG происходит утрата структурных характеристик частицы и остаются только волновые свойства данного микрообъекта. Перечисленный набор предположений не является избыточным для поставленной цели. Стоит убрать одно из пяти предположений — и станет невозможной формулировка уравнения Дирака.

2. ЗАМЕЧАНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФОРМАЛИЗМЕ

Сфера приложений конечных групп в физике и смежных областях постоянно расширяется [14]. Ниже будем иметь дело с алгебрами, образующие элементы которых являются конечными группами, или групповыми алгебрами. Частными случаями таковых являются алгебры Клиффорда, Грассмана и некоторые другие. Для их анализа и построения неприводимых представлений (НП) можно использовать математический аппарат теории конечных групп. За длительную историю своего развития он приобрел определенную мощь, универсальность [15] и, как следствие, некоторую тяжеловесность. Оказалось, что для целого класса конечных групп (для периодических групп), имеющих прикладное значение для физики, можно построить методику, позволяющую достаточно просто вычислять полный набор неприводимых представлений, наглядно оценивать при этом структуру группы [16–18] и ее физическое содержание. В данном разделе это показано на конкретных примерах.

2.1. Группа кватернионов. Группа кватернионов получается из хорошо известной алгебры кватернионов путем добавления к ее элементам тех же элементов с обратными знаками [19]. Таблица умножения группы может быть задана следующими определяющими соотношениями [20]:

$$a_2 a_1 a_2^{-1} = a_1^{-1} = a_1^3, \qquad a_1 a_2 \equiv a_3, \qquad a_1^2 = a_2^2 = a_3^2. \tag{1}$$

Группа имеет порядок восемь, ранг два, содержит три циклические подгруппы четвертого порядка и соответствующие генераторы a_1, a_2, a_3 для каждой из них. Все три подгруппы, кроме единицы e, обладают одним общим элементом $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2$, который вместе с e образует центр группы.

Построим следующее алгебраическое выражение:

$$C_4[a_1] = [e + a_1 + a_1^2 + a_1^3]. \tag{2}$$

Аналогичные выражения можно записать для подгрупп с другими генераторами: a_2, a_3.

Если генератор a_1 дополнить множителем $\exp(2\pi i k_1/4)$, где $k_1 = 1, 2, 3, 4$, то получим четыре выражения для этой циклической подгруппы:

$$C_4[k_1 a_1] = \\ = \left[e + \exp\left(\frac{2\pi i k_1}{4}\right) a_1 + \left(\exp\left(\frac{2\pi i k_1}{4}\right) a_1\right)^2 + \left(\exp\left(\frac{2\pi i k_1}{4}\right) a_1\right)^3\right]. \tag{3}$$

Они удовлетворяют таким равенствам:

$$(C_4[k_1 a_1])^2 = 4C_4[k_1 a_1], \tag{4}$$

$$C_4[k_1 a_1] C_4[k_1^{'} a_1] = 4\delta_{k_1 k_1^{'}} C_4[k_1 a_1], \tag{5}$$

$$a_1 C_4[k_1 a_1] = \exp\left(\frac{2\pi i(4 - k_1)}{4}\right) C_4[k_1 a_1]. \tag{6}$$

Отсюда следует, что выражения $C_4[k_1 a_1]$ реализуют неприводимые представления, в данном случае циклической группы четвертого порядка. Группа абелева, все представления одномерные.

Будем называть циклической структурой (ЦС) некоторой конечной группы [21] сумму всех ее элементов, записанную в виде произведения ее циклических подгрупп. В тех случаях, когда это возможно, произведение должно включать в себя как минимум циклические подгруппы, содержащие генераторы группы. Очевидно, что такая алгебраическая конструкция является одномерным единичным представлением, записанным в мультипликативной форме.

Группа кватернионов имеет ранг два, значит, все ее элементы выражаются через два генератора. Как отмечалось выше, оба генератора порождают циклические подгруппы четвертого порядка. Обозначим

$$Q_2[a_1, a_2] \equiv \frac{1}{2} C_4[a_1] C_4[a_2]. \tag{7}$$

Учитывая, что $a_1^2 = a_2^2$ и $C_4[a_2] = [e + a_2][e + a_2^2]$, можно записать ЦС группы кватернионов в виде

$$Q_2[a_1, a_2] = C_4[a_1][e + a_2] = [e + a_1 + a_1^2 + a_1^3][e + a_2]. \tag{8}$$

Видно, что если раскрыть скобки, то выражение будет содержать все восемь элементов группы и ничего сверх того.

Далее, как в случае C_4, дополним каждый из генераторов множителями, т. е. значениями примитивных корней четвертой степени из единицы $\exp(2\pi i k_{1,2}/4)$, где k_1, k_2 пробегают независимо значения $1, 2, 3, 4$. Тогда с учетом $a_1^2 = a_2^2$ из 16 возможных выражений получаем восемь, не равных нулю:

$$\begin{aligned}
&1)\ \ Q_2[k_1 = 4, a_1; k_2 = 4, a_2] = [e + a_1 + a_1^2 + a_1^3][e + a_2];\\
&2)\ \ Q_2[k_1 = 4, a_1; k_2 = 2, a_2] = [e + a_1 + a_1^2 + a_1^3][e - a_2];\\
&3)\ \ Q_2[k_1 = 2, a_1; k_2 = 4, a_2] = [e - a_1 + a_1^2 - a_1^3][e + a_2];\\
&4)\ \ Q_2[k_1 = 2, a_1; k_2 = 2, a_2] = [e - a_1 + a_1^2 - a_1^3][e + a_2];\\
&5)\ \ Q_2[k_1 = 1, a_1; k_2 = 1, a_2] = [e + ia_1 - a_1^2 - ia_1^3][e + ia_2];\\
&6)\ \ Q_2[k_1 = 3, a_1; k_2 = 1, a_2] = [e - ia_1 - a_1^2 + ia_1^3][e + ia_2];\\
&7)\ \ Q_2[k_1 = 1, a_1; k_2 = 3, a_2] = [e + ia_1 - a_1^2 - ia_1^3][e - ia_2];\\
&8)\ \ Q_2[k_1 = 3, a_1; k_2 = 3, a_2] = [e - ia_1 - a_1^2 + ia_1^3][e - ia_2].
\end{aligned} \tag{9}$$

Согласно (4)–(6) k_1, k_2 для каждого выражения принимают одновременно либо четные, либо нечетные значения. Кроме того, из структуры C_4 для четных k_1, k_2 следует, что при умножении первых четырех равенств на любой из генераторов они не меняются, но приобретают множитель ± 1. Таким образом, первая четверка равенств доставляет четыре одномерных неэквивалентных представления. При умножении слева равенств 5) и 6) (из набора (9)) на генераторы a_1, a_2 они замыкаются в рамках только этих двух равенств.

То же самое можно сказать о равенствах 7) и 8). Другими словами, мы имеем два двумерных представления. В матричной записи они имеют следующий вид:

$$a_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix};$$

$$a'_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \qquad a'_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, это два эквивалентных двумерных представления, так как $a_1 = a'_1$ и $a'_2 = a_1 a_2 a_1^{-1}$.

Утверждение теоремы Бернсайда о том, что сумма квадратов размерностей неэквивалентных неприводимых представлений равна порядку группы, в данном случае выполняется: $8 = 4 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2$.

Если, кроме того, отметить, что число эквивалентных НП равно их размерности, то можно говорить, что равенства (9) являются своеобразным операторным аналогом регулярного представления. Так же, как в случае регулярного представления, число неэквивалентных представлений равно числу смежных классов группы и каждое НП повторяется в нем такое число раз, какова размерность этого представления.

Если построить алгебру на элементах НП группы, полагая, что правило умножения образующих элементов алгебры вытекает из закона композиции элементов группы, то можно вычислить коммутаторы:

$$\begin{aligned} [a_1, a_2] &= 2a_3, \\ [a_2, a_3] &= 2a_1, \\ [a_3, a_1] &= 2a_2, \end{aligned} \tag{10}$$

где $a_3 = a_1 a_2$. С точностью до одного и того же нормировочного множителя полученные коммутаторы совпадают с коммутаторами инфинитезимальных операторов группы трехмерных вращений [22, 23].

Отсюда следует вывод. Если ограничиться действительными значениями трех параметров, то алгебра кватернионов эквивалентна алгебре инфинитезимальных операторов группы трехмерных вращений с весовым числом $l = 1/2$. Можно также отметить антикоммутационные соотношения для a_1, a_2, a_3: $\{a_i, a_k\} = 2\delta_{ik}$, $i, k = 1, 2, 3$.

2.2. Группа Лоренца. Если к рассмотренной группе кватернионов (1) добавить еще один генератор c исходя из определяющих соотношений

$$ca_1c^{-1} = a_1, \qquad c^2 = a_1^2, \qquad ca_2c^{-1} = a_2, \tag{11}$$

то такое расширение образует группу со следующей ЦС:

$$d_\gamma[a_1, a_2, c] = Q_2[a_1, a_2][e + c] = C_4[a_1][e + a_2][e + c]. \tag{12}$$

Здесь все три генератора a_1, a_2, c имеют порядок четыре. Из определяющих соотношений следует, что группа $d_\gamma[a_1, a_2, c]$ имеет центр, состоящий из четырех элементов (e, a_1^2, c, ca_1^2), порядок группы равен 16, число сопряженных классов — 10.

Как в предыдущем примере, умножим каждый генератор на примитивные корни четвертой степени из единицы, т. е. $r_1 = \exp(2\pi i k_1/4)$, $r_2 = \exp(2\pi i k_2/4)$, $r_3 = \exp(2\pi i k_3/4)$, где k_1, k_2, k_3 принимают значения $1, 2, 3, 4$ независимо для каждого из них. При этом опять находим, что не равняются нулю только те 16 выражений, в которых все k одновременно либо четные, либо нечетные:

$$d_\gamma[k_1, a_1; k_2, a_2; k_3, c] = C_4[r_1 a_1][e + r_2 a_2][e + r_3 c]. \tag{13}$$

Как и ранее, при четных k_1, k_2, k_3 имеем одномерные представления. В данном случае их будет восемь.

Из определяющих соотношений для a_1, a_2, c следует, что при умножении слева любого из равенств с нечетными значениями k_1, k_2, k_3 на каждый из трех генераторов происходит замыкание только на два равенства. Для 16 равенств (13) введем для краткости обозначения

$$d_\gamma[k_1 = 1, a_1; k_2 = 1, a_2; k_3 = 1, c] \equiv d_\gamma[1, 1, 1]$$

и аналогично для других значений k_1, k_2, k_3

$$d_\gamma[k_1 = 3, a_1; k_2 = 1, a_2; k_3 = 1, c] \equiv d_\gamma[3, 1, 1].$$

Тогда, начиная с первого из них, получаем

$$\begin{aligned} a_1 d_\gamma[1,1,1] &= -i d_\gamma[1,1,1], & a_1 d_\gamma[3,1,1] &= i d_\gamma[3,1,1], \\ a_2 d_\gamma[1,1,1] &= -i d_\gamma[3,1,1], & a_2 d_\gamma[3,1,1] &= -i d_\gamma[1,1,1], \\ c d_\gamma[1,1,1] &= -i d_\gamma[1,1,1], & c d_\gamma[3,1,1] &= -i d_\gamma[3,1,1]. \end{aligned}$$

В матричной форме это соответствует равенствам

$$a_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Если начать с выражения $d_\gamma[k_1 = 1, a_1; k_2 = 1, a_2; k_3 = 3, c]$, то получается другой набор матриц:

$$a_1' = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad a_2' = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad c' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Очевидно, что эти два представления неэквивалентны по той причине, что первые две матрицы совпадают, а третьи имеют различные шпуры.

Все остальные случаи эквивалентны одному из этих двух. Таким образом, имеем регулярное представление и утверждение теоремы Бернсайда в виде

$$16 = 8 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2. \tag{16}$$

Как и ранее, произведение любых двух выражений из (13) равняется нулю, если они принадлежат различным неэквивалентным представлениям.

Вычислим еще один элемент подгруппы кватернионов:

$$a_3 = a_1 a_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

И далее следующие элементы неприводимого представления группы:

$$b_1 = a_1 c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ b_2 = a_2 c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ b_3 = a_3 c = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Считая выражения для a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 образующими элементами алгебры, находим такие коммутаторы:

$$\begin{array}{lll}
[a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\
[b_1, b_2] = -2a_3, & [b_2, b_3] = -2a_1, & [b_3, b_1] = -2a_2, \\
[a_1, b_1] = 0, & [a_2, b_2] = 0, & [a_3, b_3] = 0, \\
[a_1, b_2] = 2b_3, & [a_1, b_3] = -2b_2, & \\
[a_2, b_3] = 2b_1, & [a_2, b_1] = -2b_3, & \\
[a_3, b_1] = 2b_2, & [a_3, b_2] = -2b_1. &
\end{array} \tag{18}$$

Здесь введены обозначения

$$b_1 = a_1 c, \quad b_2 = a_2 c, \quad b_3 = a_3 c. \tag{19}$$

Если отвлечься от общего для всех соотношений нормировочного множителя два, то полученные коммутационные соотношения (КС) полностью совпадают с коммутаторами инфинитезимальных матриц собственного преобразования Лоренца [22, 23]. С шестью операторами a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 связаны шесть действительных параметров группы Лоренца. Оператор c в данной группе переводит инфинитезимальные операторы трехмерных вращений a_1, a_2, a_3 в операторы инфинитезимальных преобразований Лоренца вдоль соответствующих осей координат b_1, b_2, b_3. Согласно (11) оператор c является элементом центра группы, поэтому в данном представлении он равен единичному оператору, умноженному на мнимую единицу i. Далее представления с КС типа (18) будут называться собственными представлениями группы Лоренца. Учитывая размерность представлений, можно утверждать, что собственное неприводимое представление (18) группы Лоренца записано в формате группы

$Sl(2, c)$. Следуя [22], нетрудно вычислить, что первое весовое число данного НП равняется $l_0 = 1/2$.

Из соотношений (11) и (17) вытекает, что три элемента $b_1 = a_1 c, b_2 = a_2 c, b_3 = a_3 c$ порождают группу d_γ так же, как генераторы a_1, a_2, c. Три генератора собственного представления группы Лоренца в виде матриц (17) удовлетворяют следующим антикоммутационным соотношениям:

$$\{b_i, b_k\} = 2\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3. \tag{20}$$

Равенства (20) можно понимать как определяющие соотношения между генераторами группы $b_\gamma[b_1, b_2, b_3]$ и как предельно сжатый эквивалент соотношений (18).

3. ГРУППА γ-МАТРИЦ ДИРАКА

Почти вся информация, которая содержится в свободном уравнении Дирака, определяется тем, что γ-матрицы образуют конечную группу порядка 32 (далее — группа Дирака) [15], а также структурой группы и ее свойствами. Это известное обстоятельство, которое в полной мере не изучалось, и можно сказать, что вопрос о роли структуры группы Дирака вплоть до недавнего времени выпал из поля зрения специалистов [24]. Изложенный ниже анализ восполняет имеющийся пробел по данному вопросу.

3.1. Подгруппа собственного представления группы Лоренца. Следуя работе [1], запишем уравнение Дирака в виде

$$[i(\gamma_\mu p_\mu) + m]\psi = 0, \tag{21}$$

где

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \qquad \gamma_\mu^2 = 1. \tag{22}$$

Равенства (22) являются определяющими соотношениями для группы Дирака.

Здесь и далее используется система единиц $c = \hbar = 1$.

Обозначим

$$a_1 \sim \gamma_3\gamma_2, \qquad a_2 \sim \gamma_1\gamma_3, \qquad a_3 \equiv a_1 a_2 \sim \gamma_2\gamma_1. \tag{23}$$

Символ $\sim$ обозначает соответствие отношений между элементами искомой подгруппы, содержащей a_1, a_2, a_3, и γ-матрицами Дирака. Тогда получаем равества $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2, \quad a_2 a_1 a_2^{-1} = a_1^{-1}$. Отсюда следует, что элементы a_1, a_2 по умножению генерируют группу кватернионов (1). Обозначим ее, как ранее: $Q_2[a_1, a_2]$.

Далее обозначим $c \sim \gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Видно, что c коммутирует со всеми элементами подгруппы $Q_2[a_1, a_2]$ и $c^2 = a_1^2$. Прямым вычислением можно убедиться, что расширение $Q_2[a_1, a_2]$ с помощью c приводит к группе 16-го порядка, которая изоморфна рассмотренной ранее группе (12). Таким образом, группа γ-матриц Дирака содержит подгруппу d_γ, на которой реализуется собственное представление группы Лоренца.

Если, кроме того, обозначить

$$b_1 \equiv ca_1 \sim \gamma_1, \qquad b_2 \equiv ca_2 \sim \gamma_2, \qquad b_3 \equiv ca_3 \sim \gamma_3, \tag{24}$$

то получим КС (18). Здесь, как и ранее, $b_1(\sim \gamma_1), b_2(\sim \gamma_2), b_3(\sim \gamma_3)$ имеют смысл инфинитезимальных операторов бустов. Таким образом, собственное представление группы Лоренца содержится в группе Дирака в виде подгруппы 16-го порядка.

Последующее расширение $d_\gamma[a_1, a_2, c]$ с помощью дополнительного генератора b_4 приводит к группе γ-матриц Дирака. ЦС при этом может быть записана в виде

$$D_\gamma[\text{II}] = d_\gamma[a_1, a_2, c][e + b_4], \tag{25}$$

где b_4 является групповым эквивалентом γ_4 и $b_4^2 = e$.

Из свойств γ-матриц следует, что все они распределяются по 17 сопряженным классам. Два элемента образуют отдельные классы e и квадрат любого элемента четвертого порядка типа $a_1^2 = a_2^2 = c^2 = -I$. Эти два элемента составляют центр группы. Остальные 30 распределены по 15 классам, каждый из которых содержит по два взаимно-обратных элемента, если это элементы четвертого порядка. Кроме того, один и тот же класс сопряженности составляют два элемента второго порядка, которые отличаются множителем, равным элементу второго порядка из центра группы, т. е. $-I$. В итоге получаем 17 сопряженных классов и столько же неприводимых представлений.

Построение аналога регулярного представления выполняется по той же схеме, как для группы $d_\gamma[a_1, a_2, c]$ (п. 2.1). В данном случае это приводит к 32 равенствам:

$$D_\gamma[r_1a_1, r_2a_2, r_3c, r_4b_4] = C_4[r_1a_1][e + r_2a_2][e + r_3c][e + r_4b_4], \tag{26}$$

где $r_1, r_2, r_3, r_4 = \exp(2\pi ik/4)$. Если $k = 1, 2, 3, 4$ меняется независимо для каждого из четырех сомножителей, то не равными нулю получаются только те выражения, в которых все k либо только четные, либо только нечетные.

В случае четных k получаются 16 одномерных НП. Для нечетных получаются четыре эквивалентных четырехмерных НП, что согласуется с теоремой Бернсайда: $32 = 16 \cdot 1^2 + 1 \cdot 4^2$. Набор коммутационных соотношений в данном случае принимает вид

$$
\begin{array}{lll}
[a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\
[b_1, b_2] = -2a_3, & [b_2, b_3] = -2a_1, & [b_3, b_1] = -2a_2, \\
[a_1, b_1] = 0, & [a_2, b_2] = 0, & [a_3, b_3] = 0, \\
[a_1, b_2] = 2b_3 & [a_1, b_3] = -2b_2, & \\
[a_2, b_3] = 2b_1, & [a_2, b_1] = -2b_3, & \\
[a_3, b_1] = 2b_2, & [a_3, b_2] = -2b_1. &
\end{array}
\qquad (27)
$$

Видно, что КС (18) для группы $d_\gamma[a_1, a_2, c]$ (они же — алгебра Ли для собственного представления группы Лоренца) совпадают тождественно с КС для данного случая, если $d_\gamma[a_1, a_2, c]$ выбрана для записи представления уравнения группы Дирака $D_\gamma(\mathrm{II})$. Возрастает размерность представления. При этом представления группы Дирака распадаются на блок-диагональную форму. Первое весовое число по-прежнему $l_0 = 1/2$, но оно становится дважды вырожденным. Причина заключается в том, что информационный объем группы $D_\gamma(\mathrm{II})$ заметно больше, чем группы $d_\gamma[a_1, a_2, c]$. В частности, группа Дирака содержит (T)-сопряженное представление группы Лоренца, чего не может быть в группе $d_\gamma[a_1, a_2, c]$ по определению.

3.2. Подгруппа (T)-сопряженного представления. Выражение (25) допускает иную запись ЦС благодаря другому выбору генераторов группы γ-матриц. Вместо генераторов $\{a_1, a_2, c, b_4\}$ можно выбрать $\{a_1, a_2, c', b'_4\}$. Здесь $c' \sim \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ и $b'_4 \sim \gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

В результате ЦС той же самой группы принимает вид

$$D_\gamma[a_1, a_2, c', b'_4] = Q_2[a_1, a_2][e + c'][e + b'_4]. \qquad (28)$$

Так же, как и в случае (25), данное выражение представляет собой сумму всех элементов группы, но записанную в виде других сомножителей. Прямой проверкой можно убедиться, что выражение

$$b_\gamma[a_1, a_2, c'] = Q_2[a_1, a_2][e + c'] \qquad (29)$$

представляет собой ЦС подгруппы 16-го порядка. Из выражений для генераторов a_1, a_2, c' следуют такие определяющие соотношения для подгруппы b_γ:

$$
\begin{array}{ll}
a_2 a_1 a_2^{-1} = a_1^{-1}, & a_1 a_2 a_1^{-1} = a_2^{-1}, \\
(c') a_1 (c')^{-1} = a_1, & (c') a_2 (c')^{-1} = a_2.
\end{array}
\qquad (30)
$$

Сравнение определяющих соотношений (11) и (30) показывает, что d_γ и b_γ имеют отчасти одинаковые свойства. Действительно, каждая подгруппа имеет порядок 16, центры содержат по четыре элемента и совпадающее число сопряженных классов — 10. Как d_γ, так и b_γ содержат подгруппу кватернионов. Но имеются и различия. Так, генератор c имеет порядок четыре, тогда как c' — второго порядка. Поэтому подгруппа b_γ не изоморфна подгруппе d_γ.

Обозначим

$$b'_1 \equiv c'a_1 \sim \gamma_1\gamma_4, \qquad b'_2 \equiv c'a_2 \sim \gamma_2\gamma_4, \qquad b'_3 \equiv c'a_3 \sim \gamma_3\gamma_4. \tag{31}$$

Если на элементах группы $b_\gamma[a_1, a_2, c'] = Q_2[a_1, a_2][e + c']$ определить алгебру аналогично случаю d_γ, то получим КС, весьма похожие на (18):

$$\begin{array}{lll}
[a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\
[b'_1, b'_2] = 2a_3, & [b'_2, b'_3] = 2a_1, & [b'_3, b'_1] = 2a_2, \\
[a_1, b'_1] = 0, & [a_2, b'_2] = 0, & [a_3, b'_3] = 0, \\
[a_1, b'_2] = 2b'_3, & [a_1, b'_3] = -2b'_2, & \\
[a_2, b'_3] = 2b'_1, & [a_2, b'_1] = -2b'_3, & \\
[a_3, b'_1] = 2b'_2, & [a_3, b'_2] = -2b'_1. &
\end{array} \tag{32}$$

Очевидно, что (18) преобразуется в (32) при замене

$$b_k \to b'_k = ib_k, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{33}$$

При этом подгруппа d_γ переходит в подгруппу b_γ: $d_\gamma \to b_\gamma$. Различие КС (18) и (32) заключается в противоположных знаках трех коммутаторов, расположенных во второй верхней строке. Никаким неособенным преобразованием это расхождение не устраняется, так как подгруппы d_γ и b_γ не изоморфны. Время как параметр преобразований Лоренца проявляется, начиная с этой строки. Все остальные коммутаторы, расположенные ниже, являются следствием первых шести операторов, расположенных в двух верхних строках. Поэтому данный тип неприводимых представлений был назван (T)-сопряженным по отношению к собственному, который реализуется на подгруппе d_γ. Кроме того, очевидно, что (T)-сопряжение не затрагивает операторы a_1, a_2, a_3, поэтому оно не меняет значение $l_0 = 1/2$ и тип спина, т. е. все три пространственных оси остаются одинаково возможными для выбора оси квантования. Это обстоятельство является одним из факторов для формирования объективных критериев, на основе которых можно формулировать отношения частица–античастица.

Для последующего важно отметить, что в группе $D_\gamma(\mathrm{II})$ содержится два типа подгрупп d_γ и b_γ и не содержится других подгрупп 16-порядка, не изоморфных им.

3.3. (P)-сопряженное представление и двойственность d_γ. Детальное изучение структуры подгруппы d_γ показало, что она обладает двойственностью. Выражается это в том, что помимо подгруппы $Q_2[a_1, a'_2]$ в d_γ содержится еще одна подгруппа восьмого порядка q_2 с ЦС вида

$$q_2[a_1, a'_2, a'_3] = C_4[a_1][e + a'_2], \tag{34}$$

где $a_1 \sim \gamma_3\gamma_2, \quad a'_2 \sim \gamma_2, \quad a'_3 \equiv a_1 a'_2 \sim \gamma_3$. Определяющие соотношения между элементами $q_2[a_1, a'_2]$ весьма похожи на коммутаторы для $Q_2[a_1, a'_2]$. Разница заключается в том, что в Q_2 все три элемента a_1, a_2, a_3 имеют порядок четыре, тогда как в q_2 только элемент a_1 имеет порядок четыре, два других — порядок два. Элементы алгебры, построенной на $q_2[a_1, a'_2]$, удовлетворяют следующим КС:

$$[a_1, a'_2] = 2a'_3, \qquad [a'_2, a'_3] = -2a_1, \qquad [a'_3, a_1] = 2a'_2. \tag{35}$$

Они весьма похожи на коммутаторы для группы трехмерных вращений (см. (10) или первую строку (18)). Отличие лишь в знаке второго коммутатора.

Переход от КС (10) к (35) равносилен замене $a'_2 \to ia_2$, и по определению ($a_3 \equiv a_1 a_2$) получаем $a'_3 \to ia_3$. При этом подгруппа кватернионов $Q_2[a_1, a_2]$ переходит в подгруппу $q_2[a_1, a'_2]$ с почти совпадающими определяющими отношениями. Различия заключаются в порядках генераторов как элементов группы. Как следствие различных порядков элементов a'_2, a'_3 и a_1 получается здесь и далее в подобных случаях неэквивалентность пространственных направлений или асимметрия между левым и правым.

Последующее расширение группы $q_2[a_1, a'_2]$ с помощью того же генератора c, который фигурирует в равенстве (25), ведет к группе 16-го порядка:

$$f_\gamma = C_4[a_1][e + a'_2][e + c]. \tag{36}$$

В силу построения подгруппа f_γ изоморфна d_γ. Различие ЦС отражает неодинаковый выбор трех генераторов в первом и во втором случаях. При этом $c \sim \gamma_1\gamma_2\gamma_3$ по-прежнему является элементом центра подгруппы.

Коммутационные соотношения на основе подгруппы f_γ строятся по аналогии с двумя предыдущими случаями:

$$\begin{array}{lll}
[a_1, a'_2] = 2a'_3, & [a'_2, a'_3] = -2a_1, & [a'_3, a_1] = 2a'_2, \\
[b''_1, b''_2] = -2a'_3, & [b''_2, b''_3] = 2a_1, & [b''_3, b''_1] = -2a'_2, \\
[a_1, b''_1] = 0, & [a'_2, b''_2] = 0, & [a'_3, b''_3] = 0, \\
[a_1, b''_2] = 2b''_3, & [a_1, b''_3] = -2b''_2, & \\
[a'_2, b''_3] = -2b''_1, & [a'_2, b''_1] = -2b''_3, & \\
[a'_3, b''_1] = 2b''_2, & [a'_3, b''_2] = 2b''_1, &
\end{array} \tag{37}$$

где $b''_1 = a_1 c, \quad b''_2 = a'_1 c, \quad b''_3 = a'_3 c, \quad c = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Данный вид представления был назван (P)-сопряженным по отношению к d_γ, так как различие возникает уже в первой строке КС (37) т. е. на уровне подгруппы трехмерных вращений. Все последующие (ниже первой строки) отклонения от коммутаторов (18) являются следствием первичного изменения $a'_2 \sim \gamma_2$, $a'_3 \equiv a_1 a'_2 \sim \gamma_3$ в подгруппе трехмерных вращений.

Как уже отмечалось, группа γ-матриц Дирака содержит только два типа подгрупп 16-го порядка, не изоморфных друг другу, — d_γ и b_γ. Поэтому для уравнения Дирака соотношения (18), (32) и (37) исчерпывают, учитывая двойственность d_γ, все возможные типы равенств, которые называются коммутационными соотношениями для инфинитезимальных операторов группы Лоренца. Другими словами, группа Дирака содержит три типа компонентов связности из четырех возможных.

Введем обозначения для операций перехода между найденными подгруппами и соответствующими КС. В конкретных матричных реализациях неприводимых представлений переход $d_\gamma \to b_\gamma$ будем обозначать так:

$$b_\gamma = \langle T \rangle d_\gamma, \tag{38}$$

что эквивалентно замене

$$b_k \to b'_k = i b_k, \quad k = 1, 2, 3. \tag{39}$$

Следствием перехода от подгруппы d_γ к b_γ является переход от КС (18) к (32). Операцию, обратную к названной, обозначим $\langle T^{-1} \rangle$. Тогда переход $d_\gamma = \langle T^{-1} \rangle b_\gamma$, очевидно, связан с заменой

$$b'_k \to b_k = -i b'_k, \quad k = 1, 2, 3. \tag{40}$$

Аналогично для перехода $d_\gamma \to f_\gamma$ и обратно введем такие обозначения:

$$f_\gamma = \langle P \rangle d_\gamma, \qquad d_\gamma = \langle P^{-1} \rangle f_\gamma. \tag{41}$$

Здесь $\langle P \rangle$ обозначает замену генераторов по правилу

$$a'_1 = a_1, \quad a_2 \to a'_2 = i a_2. \tag{42}$$

Как следствие, получаем

$$a_3 \to a'_3 = i a_3, \quad b_1 \to b'_1 = i b_1, \quad b_2 \to b'_2 = i b_2, \quad b_3 \to b'_3 = i b_3$$

и переход от КС (18) к (37). Процедура обратного перехода $\langle P^{-1} \rangle$ соответствует преобразованию $a'_2 \to a_2 = -i a'_2$.

Естественно, что подгруппы f_γ и b_γ тоже могут быть связаны между собой с помощью операций $\langle T \rangle$ и $\langle P \rangle$. Действительно, $d_\gamma = \langle P^{-1} \rangle f_\gamma$. Обозначив последовательное действие операций $\langle T \rangle \langle P^{-1} \rangle \equiv \langle T P^{-1} \rangle$, с учетом (37) получаем

$$\langle T P^{-1} \rangle f_\gamma = b_\gamma. \tag{43}$$

Нетрудно заметить, что сами по себе обе операции коммутируют:

$$\langle TP^{-1} \rangle = \langle P^{-1}T \rangle. \tag{44}$$

Но при этом выясняется, что уравнение Дирака не замкнуто относительно действия всевозможных комбинаций $\langle T \rangle$ и $\langle P \rangle$. Это означает, что действие этих операций на подгруппы $d_\gamma, f_\gamma, b_\gamma$ приводит к появлению подгруппы, не содержащейся в группе γ-матриц Дирака. Достаточно просто и наглядно в этом можно убедиться на примере КС (18). Обозначим последовательное действие двух операций $\langle T \rangle$ и $\langle P \rangle$ на d_γ так:

$$\langle TP \rangle d_\gamma = c_\gamma. \tag{45}$$

Действие этих же операций на КС (18) приводит к КС, отличным от трех предыдущих (18), (32), (37):

$$\begin{array}{lll}
[a_1, a_2'] = 2a_3', & [a_2', a_3'] = -2a_1, & [a_3', a_1] = 2a_2', \\
[b_1^*, b_2^*] = 2a_3', & [b_2^*, b_3^*] = -2a_1, & [b_3^*, b_1^*] = 2a_2', \\
[a_1, b_1^*] = 0, & [a_2', b_2^*] = 0, & [a_3', b_3^*] = 0, \\
[a_1, b_2^*] = 2b_3^*, & [a_1, b_3^*] = -2b_2^*, & \\
[a_2', b_3^*] = -2b_1^*, & [a_2', b_1^*] = -2b_3^*, & \\
[a_3', b_1^*] = 2b_2^*, & [a_3', b_2^*] = 2b_1^*. &
\end{array} \tag{46}$$

Никаким неособенным преобразованием получить КС (46) из предыдущих невозможно, так как они связаны с группой c_γ, не изоморфной ни подгруппе d_γ, ни подгруппе b_γ [25]. Так же как и в случае подгруппы f_γ, отличие от собственных КС (18) возникает уже в первой строке. Это означает, что c_γ содержит подгруппу $q_2[a_1, a_2']$. ЦС c_γ отличается от ЦС f_γ тем, что третий генератор c'', также будучи центром группы, имеет порядок два:

$$c_\gamma = C_4[a_1][e + a_2'][e + c''], \tag{47}$$

где $c''^2 = e$.

Группа c_γ также, как d_γ и b_γ, имеет центр, состоящий из четырех элементов и десяти сопряженных классов. Это означает, что имеется восемь одномерных и два неэквивалентных НП. В этом отношении все три группы схожи. Все сказанное о первом весовом числе $l_0 = 1/2$ для f_γ верно и для c_γ, так как все его характеристики определяются подгруппой $q_2[a_1, a_2']$.

Для последующего отметим формулы антикоммутаторов для генераторов групп, не являющихся собственными представлениями группы Лоренца, аналогичные (20). Так, для группы (T)-сопряженного представления они имеют вид

$$\{b_i', b_k'\} = -2\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3. \tag{48}$$

Соотношения (48) можно понимать как определяющие соотношения для группы $b_\gamma[b'_1, b'_2, b'_3]$, из которых однозначно вытекают соотношения (32). Такая же предельно сжатая форма, ведущая к соотношениям (37), выглядит так:

$$\begin{aligned} &\{b''_s, b''_t\} = -2\delta_{st}, \quad s, t = 1, 2, 3, \quad s = t \neq 1, \\ &\{b''_s, b''_t\} = 2\delta_{st}, \qquad s = t = 1. \end{aligned} \tag{49}$$

Аналогичные выражения для КС (46) подгруппы $c_\gamma[b^*_1, b^*_2, b^*_3]$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\{b^*_s, b^*_t\} = 2\delta_{st}, \qquad s, t = 1, 2, 3, \quad s = t \neq 1, \\ &\{b^*_s, b^*_t\} = -2\delta_{st}, \quad s = t = 1. \end{aligned} \tag{50}$$

Исходя из соотношений (33), (43) и (45) можно записать следующий ряд равенств:

$$\langle T\rangle d_\gamma = b_\gamma, \qquad \langle P\rangle d_\gamma = f_\gamma, \qquad \langle PT\rangle d_\gamma = c_\gamma, \tag{51}$$

$$\langle T^{-1}\rangle b_\gamma = d_\gamma, \qquad \langle P\rangle b_\gamma = c_\gamma, \qquad \langle T^{-1}P\rangle b_\gamma = f_\gamma, \tag{52}$$

$$\langle T^{-1}\rangle c_\gamma = f_\gamma, \qquad \langle P^{-1}\rangle c_\gamma = b_\gamma, \qquad \langle T^{-1}P^{-1}\rangle c_\gamma = d_\gamma, \tag{53}$$

$$\langle T\rangle f_\gamma = c_\gamma, \qquad \langle P^{-1}\rangle f_\gamma = d_\gamma, \qquad \langle P^{-1}T\rangle f_\gamma = b_\gamma. \tag{54}$$

Равенства показывают, что четыре группы $d_\gamma, f_\gamma, b_\gamma, c_\gamma$ образуют полный набор, который замкнут относительно произвольного сочетания дискретных преобразований. Четыре группы соответствуют четырем классам дискретных преобразований группы Лоренца или четырем компонентам связности группы Лоренца. Принято различать эти классы по величине детерминанта (± 1) и изменению знака ($\pm$) временного компонента 4-вектора по отношению к собственному преобразованию Лоренца. Как видно из КС (18), (32), (37) и (46), на каждой из подгрупп реализуется по одному неприводимому представлению группы Лоренца из четырех возможных классов.

Очевидно, что все операции сопряжения являются преобразованиями четвертого порядка, т. е. квадрат каждого из них не является тождественным преобразованием. Это означает, например, что $\langle T\rangle\langle T\rangle \equiv \langle T^2\rangle \neq I$ и только $\langle T^4\rangle = I$.

4. СТРУКТУРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ МАТРИЧНЫХ ГРУПП

Дополнительным инструментом анализа объектов типа группы γ-матриц Дирака и понимания новых возможностей в рамках единых общих требований является теорема о трех типах матричных групп [15]. Теорема утверждает: если $D_\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ является неприводимой матричной группой, то

$$\mathrm{In}\,[D_\gamma] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sp}\,(\gamma_i^2) = \left\{ \begin{array}{r} 1, \\ -1, \\ 0. \end{array} \right. \tag{55}$$

Здесь n — порядок группы, $\mathrm{Sp}\,(\gamma_i^2)$ — след квадрата i-й матрицы из данной матричной группы. Далее число $\mathrm{In}\,[D_\gamma]$ будет называться структурным инвариантом (СИ) группы D_γ.

Согласно теореме если группа относится к первому типу ($\mathrm{In}\,[D_\gamma] = 1$), то она эквивалентна группе реальных матриц. В таком случае она эквивалентна также группе ортогональных матриц. Если группа относится ко второму типу ($\mathrm{In}\,[D_\gamma] = -1$), то она эквивалентна своей комплексно-сопряженной группе (так, что существует S такая, что $\gamma_i^* = S^{-1}\gamma_i S$), но не реальной группе. В данной формуле (и ниже в данном разделе) символ $*$ обозначает комплексное сопряжение. Третий тип ($\mathrm{In}\,[D_\gamma] = 0$) характеризуется тем, что группа не эквивалентна комплексно-сопряженной, то есть не существует S такой, что $\gamma_i^* = S^{-1}\gamma_i S$.

Для группы γ-матриц Дирака структурный инвариант (55) получается равным $\mathrm{In}\,[D_\gamma] = -1$, что является однозначным следствием определения

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \qquad \mu,\nu = 1,2,3,4, \qquad \gamma_\mu^2 = 1. \tag{56}$$

Величина инварианта не зависит от конкретного выбора представления для γ-матриц и определяется только соотношением между числом элементов четвертого и второго порядка в группе, т. е. является некоторой структурной характеристикой [26]. Для последующих вычислений важно подчеркнуть, что в зависимости от величины СИ меняются свойства группы $D_\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ в целом. Так, для группы Дирака, когда $\mathrm{In} = -1$, требование эквивалентности $\gamma_i^* = S^{-1}\gamma_i S$ оборачивается автоморфизмом $D_\gamma(\mathrm{II}) = D_\gamma(\mathrm{II})^*$. Именно поэтому уравнение Дирака одинаково успешно описывает движение в электромагнитном поле как электрона с зарядом $-e$, так и позитрона с зарядом e. Такое положение невозможно в случае, если $\mathrm{In} = 1$, так как при этом все γ-матрицы становятся действительными.

Другим, не менее важным обстоятельством является то, что представление группы Дирака в целом является неприводимым, а максимальные инвариантные подгруппы $d_\gamma, f_\gamma, b_\gamma$ связаны с различными неприводимыми представлениями общей группы Лоренца в формате $Sl(2,c)$. Этим самым очерчиваются рамки для построения уравнений типа Дирака.

Если воспользоваться теоремой (55) по отношению к упомянутым подгруппам $d_\gamma, f_\gamma, b_\gamma, c_\gamma$ и их подгруппам восьмого порядка, то получим такие числа:

$$\begin{gathered} \mathrm{In}\,[d_\gamma] = \mathrm{In}\,[f_\gamma] = 0, \quad \mathrm{In}\,[b_\gamma] = -1, \quad \mathrm{In}\,[c_\gamma] = 1, \\ \mathrm{In}\,[Q_2] = -1, \quad \mathrm{In}\,[q_2] = 1. \end{gathered} \tag{57}$$

Поскольку подгруппы d_γ, f_γ изоморфны, их СИ совпадают. Неизоморфные подгруппы одного порядка имеют разные СИ. Их число свидетельствует в пользу того, что найденные четыре группы исчерпывают весь набор, на котором реализуются неприводимые представления всех четырех классов дискретных преобразований общей группы Лоренца с первым весовым числом $l_0 = 1/2$.

Хорошо известная так называемая фундаментальная теорема Паули [27] утверждает следующее. Если имеется два набора (4×4)-матриц γ_μ и γ'_μ, $\mu = 1, 2, 3, 4$, таких, что

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \tag{58}$$

и

$$\gamma'_\mu \gamma'_\nu + \gamma'_\nu \gamma'_\mu = 2\delta_{\mu'\nu'}, \tag{59}$$

то существует неособенная матрица S такая, что

$$\gamma'_\mu = S\gamma_\mu S^{-1}. \tag{60}$$

Следовательно, любые неособенные преобразования могут изменить явный вид γ-матриц. Но не меняется тип уравнения, его СИ, состав подгрупп и их физическая интерпретация. Уравнение по-прежнему описывает только электрон и позитрон.

Отсюда однозначно следует, что если мы хотим получить уравнение, отличное от уравнения Дирака, необходимо изменить антикоммутационные соотношения (56). Простейший и самый «минимальный» способ — оставить условие антикоммутации (56) для всех четырех генераторов, но отказаться от тотального требования $\gamma_\mu^2 = 1$ для некоторых значений μ. Чтобы понять, к чему это приведет, вернемся к теореме (55).

Группа Дирака содержит 20 элементов четвертого порядка и 12 элементов второго. Это однозначный результат определения (56), как следствие, $\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{II})] = -1$. Если, к примеру, принять $\gamma_s^2 = 1$, $s = 1, 2, 3$, и $\gamma_4^2 = -1$, то в такой группе получается 12 элементов четвертого порядка и 20 элементов второго. Получается соотношение между элементами четвертого и второго порядка, обратное по отношению к $D_\gamma(\mathrm{II})$. Вычисление в данном случае дает $\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{I})] = 1$.

Имеются десятки различных возможностей выбора антикоммутирующих $\gamma_\mu^2 = \pm 1$, $\mu = 1, 2, 3, 4$. Все они приводят к группам 32-го порядка и к двум и только двум несовпадающим значениям СИ (-1) и $(+1)$. Различие между изоморфными группами сводится к различным выборам четырех генераторов из числа элементов группы.

Совместные требования двух названных теорем позволяют достаточно просто и вместе с тем гарантированно перечислить все допустимые формулировки групп типа Дирака и оценить их пригодность быть основой волновых уравнений для стабильных лептонов с учетом исходных предположений.

5. УРАВНЕНИЕ МАЙОРАНЫ

Как известно, уравнение Майораны [6] получено с помощью искусственного приема, в результате которого все четыре γ-матрицы группы Дирака были преобразованы в матрицы с действительными элементами. В таком случае набор из четырех матриц-генераторов можно задать с помощью одного из многих вариантов, упомянутых выше. В силу теоремы (55) определяющие соотношения для группы уравнения Майораны можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} &\gamma'_s\gamma'_t + \gamma'_t\gamma'_s = 2\delta_{st}, \quad (\gamma'_{s,t})^2 = 1 \quad s,t = 1,2,3, \\ &\gamma'_s\gamma'_4 + \gamma'_4\gamma'_s = 0, \qquad s = 1,2,3, \\ &(\gamma'_4)^2 = -1. \end{aligned} \tag{61}$$

Так как для $\mu, \nu = 1,2,3$ соотношения (22) и (23) не изменились, то все построения и выводы, касающиеся подгрупп Q_2 и d_γ, остаются в силе, т. е. ЦС и соотношения между составляющими их элементами остаются без изменений.

ЦС группы в целом может быть представлена в виде

$$D_\gamma(\mathrm{I}) = d_\gamma[a_1, a_2, c][e + \gamma_4] = Q_2[a_1, a_2][e + c][e + \gamma_4]. \tag{62}$$

Как и ранее, здесь приняты обозначения

$$a_1 \sim \gamma'_3\gamma'_2, \quad a_2 \sim \gamma'_3\gamma'_1, \quad a_3 \equiv a_1a_2 \sim \gamma'_2\gamma'_1, \quad c \sim \gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3.$$

Из построения $D_\gamma(\mathrm{I})$ видно, что она содержит подгруппу d_γ. Ранее было установлено, что каждая d_γ содержит подгруппу q_2. В данном случае она выглядит так:

$$q_2[a_1, a'_2, a'_3] = C_4[a_1][e + a'_2],$$

где $a_1 \sim \gamma'_3\gamma'_2, \quad a'_2 \sim \gamma'_2, \quad a'_3 = a_1a'_2 \sim \gamma'_3$.

Последующие расширения группы $q_2[a_1, a'_2, a'_3]$ с помощью генераторов c и $c' = a_1\gamma'_4$ доставляют группы 16-го порядка f_γ и c_γ:

$$f_\gamma = C_4[a_1][e + a'_2][e + c], \quad c_\gamma = C_4[a_1][e + a'_2][e + c']. \tag{63}$$

Подобно тому, как $D_\gamma(\mathrm{II})$ содержит только подгруппы d_γ и b_γ, группа $D_\gamma(\mathrm{I})$ содержит только подгруппы d_γ и c_γ. При этом необходимо помнить о подгруппе f_γ, изоморфной d_γ. СИ в таком случае получается $\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{I})] = 1$.

Согласно утверждению теоремы (55), если $\mathrm{In} = 1$, то группа эквивалентна группе действительных матриц. С помощью развитой ранее методики они были получены в явном виде [5]:

$$
\gamma_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$
$$
\gamma_3' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_4' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{64}
$$

Выяснилось, что полный набор коммутаторов на основе этих матриц для подгруппы f_γ из (63) совпадает с КС (37), т. е. эти группы изоморфные. Однако в целом структуры групп $D_\gamma(\mathrm{II})$ и $D_\gamma(\mathrm{I})$ различные, что приводит к различию свойств частиц, которые они описывают. В силу действительности матриц $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3', \gamma_4'$ уравнение, связанное с группой (62), описывает нейтральные стабильные частицы со спиновыми свойствами, отличными от электронов или позитронов. При этом, подобно уравнению Дирака, уравнение описывает частицу и античастицу.

Можно показать, что формулировка тока как для уравнения $D_\gamma(\mathrm{II})$, так и для уравнения $D_\gamma(\mathrm{I})$ возможна на основе одной из подгрупп, связанных между собой (T)-сопряжением. Таковыми в группе $D_\gamma(\mathrm{II})$ являются подгруппы d_γ и b_γ, а в группе $D_\gamma(\mathrm{I})$ — подгруппы f_γ и c_γ. Именно это обстоятельство является необходимым и достаточным условием того, что соответствующее уравнение описывает как частицу, так и античастицу, и, как следствие, возникает возможность ковариантной формулировки уравнения.

Известно, что выражение для тока в уравнении Дирака формируется на основе подгруппы d_γ, точнее — три пространственных компонента 4-вектора тока являются генераторами этой подгруппы. Иное положение в случае группы $D_\gamma(\mathrm{I})$. Здесь, как и в группе $D_\gamma(\mathrm{II})$, имеется подгруппа d_γ. Если начать построение для тока из элементов подгруппы d_γ, то среди оставшихся элементов группы $D_\gamma(\mathrm{I})$ не имеется еще одного элемента для четвертого компонента тока с подходящими КС. Выяснилось, что имеется возможность сформировать выражение для тока на основе генераторов подгрупп f_γ или c_γ.

Чтобы выяснить различие спиновых свойств частиц, связанных с уравнением Дирака и Майораны, воспользуемся формулами для вычисления весовых чисел неприводимых представлений для группы Лоренца [22, 23]. Явный вид операторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 для неприводимых представлений позволяет найти весовые числа, связанные с этими представлениями. В случае группы d_γ

строятся операторы

$$\begin{aligned} H_+ &= ia_1 - a_2, & F_+ &= ib_1 - b_2, \\ H_- &= ia_1 + a_2, & F_- &= ib_1 + b_2, \\ H_3 &= ia_3, & F_3 &= ib_3. \end{aligned} \tag{65}$$

Весовые числа — это собственные числа операторов $H_3 = ia_3$ и $F_3 = ib_3$. В случае конечномерных представлений в качестве весовых чисел принято считать наибольшее значение из всех возможных для данного оператора. Так, вычисление весового числа для оператора H_3 для подгруппы d_γ дает $l_0 = 1/2$. Таково происхождение жестко фиксированной константы 1/2, которую принято связывать со спином электрона.

Любая перестановка операторов a_1, a_2, a_3 в формулах для H_+, H_-, H_3 не меняет значение l_0. Объясняется это исключительно тем, что все три оператора a_1, a_2, a_3 являются однотипными, т. е. как элементы группы d_γ они имеют один и тот же порядок четыре. При этом оператор $H_3 = ia_3$ в любом случае является эрмитовым, а его собственные значения — действительными числами $\pm 1/2$.

Другое положение имеет место в группе $D_\gamma(\mathrm{I})$, где строить аналогичные операторы необходимо на основе подгруппы f_γ. ЦС (62) в форме, содержащей в явном виде f_γ вместо d_γ, имеет вид

$$D_\gamma(\mathrm{I}) = f_\gamma[a_1, a_2', c][e + b_5'] = q_2[a_1, a_2'][e + c][e + c'], \tag{66}$$

где $a_1, a_2', a_3' = a_1 a_2', c$ те же, что и в уравнении (62) и $b_5' = -\gamma_2'\gamma_3'\gamma_4' = \gamma_3'\gamma_2'\gamma_4' = c'$.

Запись ЦС группы, в явном виде содержащей подгруппу c_γ, принимает вид

$$D_\gamma(\mathrm{I}) = c_\gamma[a_1, a_2', c'][e + \gamma_1'\gamma_2'\gamma_3'] = q_2[a_1, a_2'][e + c'][e + c]. \tag{67}$$

Структура группы q_2 такова, что из трех ее элементов a_1, a_2', a_3' только один элемент (a_1) является антиэрмитовым. Поэтому действительные собственные значения $l_0 = \pm 1/2$ оператора H_3 появляются при действии на элемент a_1. В двух других случаях возникают мнимые величины. Это означает выделенность оси квантования спина. Таким выделенным направлением может являться только направление импульса частицы. Таким образом, уравнение Майораны описывает дублетное состояние лептонов, т. е. частицы и античастицы. И в том, и в другом случае частицы являются стабильными, массивными и нейтральными. Спин частиц может быть направлен вдоль или против импульса.

6. УРАВНЕНИЕ ПАУЛИ

После анализа двух предыдущих групп возникает естественный вопрос о возможности существования группы с $\mathrm{In} = 0$. На основе теоремы (55) можно показать, что все допустимые варианты сохранения клиффордовых антикоммутационных соотношений (22) и (61) приводят только к двум типам групп для лептонных уравнений — $D_\gamma(\mathrm{II})$ и $D_\gamma(\mathrm{I})$. Такое положение возникает в силу следующих требований:

1. Порядок группы должен быть равен 32. Данное требование обеспечивает стабильность лептонов в силу примитивности возникающих групповых структур и, как следствие, невозможность распадов соответствующих лептонов.

2. Из соотношений (20), (48)–(50) однозначно вытекает, что для получения групп порядка 32 необходимо иметь четыре генератора.

3. Каждый из четырех генераторов как элемент группы может иметь порядок два или четыре. Данное требование жестко регламентируется тем, что спин лептонов равен 1/2.

Уравнение Паули для безмассового нейтрино, как и уравнение Майораны, было получено путем тонкого анализа и искусственной операции над уравнением Дирака. При этом результат оказался безупречным с точки зрения конечного вида уравнения. Оно соответствует основным требованиям квантовой механики, лоренц-инвариантности и ковариантности формы уравнения. В статье Вейля [28] имеется единственное замечание о нарушении пространственной четности при двухкомпонентном описании частиц. Паули в дополнение к этому справедливо отметил, что в предложенном им уравнении для безмассовых нейтрино «имеются состояния как с положительной, так и отрицательной энергией». Такое равносильно утверждению о наличии античастиц. Однако уравнение было отвергнуто автором в той же статье, где был представлен вывод уравнения. Основанием для этого послужила убежденность Паули в то время (1933 г.), что «неинвариантность относительно зеркального отображения (замены правого на левое) делает уравнение неприменимым к физическим объектам».

После крушения представлений о сохранении пространственной четности не имеется никаких оснований заявлять о несодержательности результата и отказывать в праве на существование безмассовых нейтрино. Более того, стало ясно, что существование массивных нейтрино не исключает существования безмассовых, и наоборот.

Явный вид уравнения Паули [29] на основе σ-матриц Паули позволяет найти определяющие соотношения для группы этого уравнения. В данном разделе во избежание нагромождения индексов будем обозначать γ-матрицами матрицы второго порядка. Их явный вид получается при вычислении неприводимых представлений с учетом только определяющих соотношений (69). Аналогичные замечания относятся к группам $D_\gamma(\mathrm{IV})$ и $D_\gamma(\mathrm{V})$ (см. ниже) и соответствующим им определяющим соотношениям (76) и (77). Легко проверить, что σ-матрицы удовлетворяют антикоммутационным соотношениям (20). Это означает, что три первых γ-матрицы уравнения удовлетворяют таким равенствам:

$$\gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = 2\delta_{st}, \quad s,t = 1,2,3. \tag{68}$$

Четвертая (γ_4)-матрица должна коммутировать с тремя предыдущими. В противном случае, как было установлено ранее, получается либо $D_\gamma(\mathrm{II})$, либо $D_\gamma(\mathrm{I})$. В результате определяющие соотношения для группы Паули можно выбрать в таком виде:

$$\begin{aligned}
\gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s &= 2\delta_{st}, & \gamma_s^2 &= 1, & s,t &= 1,2,3,\\
\gamma_s\gamma_4 - \gamma_4\gamma_s &= 0, & & & s &= 1,2,3,\\
\gamma_4^2 &= 1. & & & &
\end{aligned} \tag{69}$$

Очевидное и принципиальное отличие от условия Дирака (22) заключается в том, что γ_4 коммутирует с тремя остальными генераторами. Далее группу на основе определяющих соотношений (69) и связанное с ней уравнение будем обозначать $D_\gamma(\mathrm{III})$. Прямой проверкой можно убедиться, что группа $D_\gamma(\mathrm{III})$ содержит 16 элементов четвертого порядка и 16 второго порядка, т. е. после построения неприводимого представления получаем $\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{III})] = 0$. Изучение структуры группы $D_\gamma(\mathrm{III})$ с учетом (69) показало, что она содержит все четыре компонента связности группы Лоренца: d_γ, b_γ, f_γ, c_γ.

Действительно, используя первые три генератора из соотношений (69), можно записать выражение для подгруппы d_γ в полной аналогии с уравнением Дирака в виде

$$d_\gamma[b_1, b_2, b_3] = Q_2[(\gamma_3\gamma_2), (\gamma_1\gamma_3), (\gamma_2\gamma_1)][e + (\gamma_1\gamma_2\gamma_3)], \tag{70}$$

где $b_1 = \gamma_1, b_2 = \gamma_2, b_3 = \gamma_3$ — генераторы подгруппы d_γ.

В результате группа $D_\gamma(\mathrm{III})$ в полном составе на основе подгруппы d_γ может быть представлена в таком виде:

$$D'_\gamma(\mathrm{III}) = Q_2[(\gamma_3\gamma_2), (\gamma_1\gamma_3), (\gamma_2\gamma_1)][e + (\gamma_1\gamma_2\gamma_3)][e + (\gamma_4)]. \tag{71}$$

Далее нетрудно проверить, что подгруппа b_γ, которая (T)-сопряжена по отношению к подгруппе d_γ, записывается так:

$$b_\gamma[b'_1, b'_2, b'_3] = Q_2[(\gamma_3\gamma_2), (\gamma_1\gamma_3), (\gamma_2\gamma_1)][e + (\gamma_4)]. \tag{72}$$

Здесь $b'_1 = (\gamma_3\gamma_2\gamma_4)$, $b'_2 = (\gamma_1\gamma_3\gamma_4)$, $b'_3 = (\gamma_2\gamma_1\gamma_4)$ — генераторы подгруппы b_γ.

Выше уже отмечалось, что группы d_γ и f_γ изоморфны и отличаются выбором различных генераторов, связанных с неизоморфными подгруппами. Так, в подгруппе f_γ в качестве представителя подгруппы трехмерных вращений выбирается q_2 вместо Q_2. Если расширять q_2 с помощью генератора $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$, то получаем

$$f_\gamma[b_1'', b_2'', b_3''] = q_2[(\gamma_3\gamma_2), (\gamma_2), (\gamma_3)][e + (\gamma_1\gamma_2\gamma_3)]. \tag{73}$$

Здесь $b_1'' = (\gamma_1)$, $b_2'' = (-\gamma_1\gamma_3)$, $b_3'' = (\gamma_1\gamma_2)$ — генераторы подгруппы f_γ в составе группы $D_\gamma(\text{III})$.

На основе равенства (73) и учета состава центра группы $D_\gamma(\text{III})$ получаем выражение для подгруппы c_γ:

$$c_\gamma[b_1^*, b_2^*, b_3^*] = q_2[(\gamma_3\gamma_2), (\gamma_2), (\gamma_3)][e + (\gamma_4)]. \tag{74}$$

Здесь $b_1^* = (\gamma_3\gamma_2\gamma_4)$, $b_2^* = (\gamma_2\gamma_4)$, $b_3^* = (\gamma_3\gamma_4)$ — генераторы подгруппы c_γ в составе группы $D_\gamma(\text{III})$.

Теперь аналогично равенству (71) можно записать выражение для ЦС группы $D_\gamma(\text{III})$ на основе подгруппы f_γ:

$$D_\gamma''(\text{III}) = q_2[(\gamma_3\gamma_2), (\gamma_2), (\gamma_3)][e + (\gamma_1\gamma_2\gamma_3)][e + (\gamma_4)]. \tag{75}$$

Таким образом, группа $D_\gamma(\text{III})$ на основе определяющих соотношений (69) содержит все четыре компонента связности группы Лоренца. При этом попарно соответствующие им подгруппы связаны между собой (T)-сопряжением. Согласно (51)–(54) получаем $b_\gamma = \langle T\rangle d_\gamma$ и $c_\gamma = \langle T\rangle f_\gamma$. Каждая пара отдельно от другой редуцируется к уравнению KFG, и на основе каждой из них формируются выражение для 4-тока и уравнение непрерывности. Это означает, что в данном случае мы имеем два типа безмассовых нейтрино, которые различаются спиновыми свойствами.

В случае $D_\gamma'(\text{III})$ операторы подгруппы трехмерных вращений a_1, a_2, a_3 являются однотипными (т. е. имеют порядок четыре). Поэтому любая их перестановка в выражениях (65) не меняет собственные значения оператора H_3, равные $\pm 1/2$. Это означает, что каждая из осей системы координат может быть выбрана в качестве оси квантования спина. Иное положение в случае $D_\gamma''(\text{III})$. Как следует из выражений для генераторов подгруппы q_2, в данном случае имеется одно выделенное направление, когда H_3 имеет действительные собственные значения $\pm 1/2$. Таким выделенным направлением для спина может быть только импульс частицы.

7. СИНГЛЕТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЛЕПТОНОВ

После анализа группы уравнения Паули естественно возникает вопрос о всех возможных типах частиц с массой, равной нулю. Нулевая масса стабильных частиц возникает вследствие коммутации одного из четырех генераторов группы с тремя остальными генераторами этой же группы. Кроме того, все рассмотренные предыдущие уравнения (Дирака, Паули, Майораны) оказались связанными с описанием частиц и античастиц. Поэтому возникает необходимость ответить еще на один вопрос: возможно ли в рамках принятых предположений получить стабильные безмассовые частицы, такие, которые содержат компоненты связности только одного типа? Таковыми могут быть b_γ или c_γ. Наличие в составе группы только b_γ или только c_γ означает отсутствие в группе (T)-сопряженных компонентов связности и, стало быть, отсутствие античастиц.

Попытки построить группу на основе b_γ должны исходить из выражения (48), с одной стороны, и, с другой стороны, учитывать коммутацию четвертого генератора с тремя первыми. В результате определяющие соотношения для искомой группы принимают вид

$$\begin{aligned} &\gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = -2\delta_{st}, \quad s,t = 1,2,3, \\ &\gamma_4\gamma_s - \gamma_s\gamma_4 = 0, \qquad\quad \gamma_4^2 = 1. \end{aligned} \tag{76}$$

Обозначим группу, получаемую на основе соотношений (76), как $D_\gamma(\mathrm{IV})$. Вычисления дают при этом СИ $\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{IV})] = -1$.

Если задаться целью построить волновое уравнение на основе только подгруппы c_γ, то необходимо начать с выражения (50). В таком случае получаем

$$\begin{aligned} \gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s &= 0, && s \neq t, \quad s,t = 1,2,3, \\ \gamma_3^2 = \gamma_2^2 &= 1, && \gamma_1^2 = -1, \\ \gamma_4\gamma_s - \gamma_s\gamma_4 &= 0, && \gamma_4^2 = 1. \end{aligned} \tag{77}$$

Обозначим данную группу $D_\gamma(\mathrm{V})$. Величина СИ равна $\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{V})] = 1$.

Обе группы, как и три предыдущие, имеют порядок 32 и, подобно квартетному состоянию, имеют 20 сопряженных классов. Центр каждой группы состоит из восьми элементов второго порядка. Как следствие, синглетные состояния описываются двухкомпонентными спинорами.

Основная особенность обеих групп заключается в том, что каждая из них содержит подгруппы одного типа: группа $D_\gamma(\mathrm{IV})$ содержит только подгруппы b_γ, а группа $D_\gamma(\mathrm{V})$ — только подгруппы c_γ. Здесь имеются в виду подгруппы 16-го порядка. Это означает, что уравнения, связанные с ними, не содержат каких бы то ни было сопряженных компонентов, а частицы не имеют античастиц. В таком смысле мы понимаем синглетные состояния лептонов.

Из соотношений (76), (77) совместно с требованием редукции к уравнению KFG однозначно следует, что $m = 0$ для обоих уравнений. В силу некоторых названных характеристик выражения для токов и явный вид ЦС для групп $D_\gamma(\mathrm{IV})$ и $D_\gamma(\mathrm{V})$ строятся по единой схеме. Так, подгруппа кватернионов в группе $D_\gamma(\mathrm{IV})$ имеет вид

$$Q_2[(\gamma_1\gamma_2),(\gamma_1\gamma_3),(\gamma_2\gamma_3)]. \tag{78}$$

Расширение (78) до подгруппы b_γ можно выполнить с помощью γ_4. Тогда получаем

$$b_\gamma = Q_2[(\gamma_1\gamma_2),(\gamma_1\gamma_3)(\gamma_2\gamma_3)][e+\gamma_4] = b_\gamma[(\gamma_1\gamma_2\gamma_4),(\gamma_1\gamma_3\gamma_4),(\gamma_2\gamma_3\gamma_4)]. \tag{79}$$

Здесь три генератора $b_1 = (\gamma_1\gamma_2\gamma_4), b_2 = (\gamma_1\gamma_3\gamma_4), b_3 = (\gamma_2\gamma_3\gamma_4)$ порождают группу b_γ.

Дальнейшее расширение (79) до полной группы $D_\gamma(\mathrm{IV})$ можно выполнить с помощью элемента $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)$:

$$D_\gamma(\mathrm{IV}) = Q_2[(\gamma_1\gamma_2),(\gamma_1\gamma_3)(\gamma_2\gamma_3)][e+\gamma_4][e+(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)]. \tag{80}$$

Совокупность перечисленных результатов по рассматриваемой группе дает следующее выражение для сохранения потока вероятности:

$$\frac{\partial(\Psi^\dagger\Psi)}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(\Psi^\dagger\overline{\alpha}\Psi), \tag{81}$$

где $\overline{\alpha} = \{\alpha_1 = (\gamma_1\gamma_2\gamma_4),\ \alpha_2 = (\gamma_1\gamma_3\gamma_4),\ \alpha_3 = (\gamma_2\gamma_3\gamma_4)\}$, при этом Ψ есть решение уравнения, которое задается группой $D_\gamma(\mathrm{IV})$. В формулах (78)–(81) все γ-матрицы имеют размерность 2×2 и определяются соотношениями (76).

Аналогичные построения для группы $D_\gamma(\mathrm{V})$ необходимо начать с подгруппы q_2, принимая во внимание соотношения (77). Получаем

$$q_2[(\gamma_1),(\gamma_2),(\gamma_1\gamma_2)]. \tag{82}$$

Последующее расширение q_2 до подгруппы c_γ возможно тремя различными элементами, в частности, элементом γ_4. В результате получаем выражение

$$c_\gamma = q_2[(\gamma_1),(\gamma_2),(\gamma_1\gamma_2)][e+(\gamma_4)] = c_\gamma[b'_1,b'_2,b'_3], \tag{83}$$

где $b'_1 = (\gamma_1\gamma_4)$, $b'_2 = (\gamma_2\gamma_4)$, $b'_3 = (\gamma_1\gamma_2\gamma_4)$ являются генераторами подгруппы c_γ.

Выражение для полной ЦС группы $D_\gamma(\mathrm{V})$ принимает вид

$$D_\gamma(\mathrm{V}) = q_2[(\gamma_1),(\gamma_2),(\gamma_1\gamma_2)][e+\gamma_4][e+(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)]. \tag{84}$$

Здесь γ_4 и $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$ являются элементами центра группы.

Выражение для сохранения потока вероятности выглядит аналогично выражению (81) с той разницей, что здесь Ψ есть решение уравнения, которое задается группой $D_\gamma(\mathrm{V})$, а γ-матрицы размерностью 2×2 определяются соотношениями (77):

$$\frac{\partial(\Psi^\dagger \Psi)}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(\Psi^\dagger \overline{\alpha} \Psi), \tag{85}$$

где $\overline{\alpha} = \{\alpha_1 = (\gamma_1\gamma_4), \alpha_2 = (\gamma_2\gamma_4), \alpha_3 = (\gamma_1\gamma_2\gamma_4)\}$.

Можно показать, что набор групп (26), (67), (71), (80), (84) для записи в явном виде уравнений стабильных лептонов является полным. Это означает, что невозможно полученный набор, во-первых, дополнить, не выходя за рамки пяти исходных предположений, на которых основан алгоритм Дирака, и, во-вторых, удовлетворить требованиям теоремы (55). Действительно, выше было показано, что для получения любого из четырех компонентов связности группы Лоренца необходимо иметь три антикоммутирующих генератора. Четвертый антикоммутирующий генератор расширяет эту релятивистскую основу до уравнения квантовой частицы, которая обладает массой. При этом возникают структуры уравнений настолько простые, что им не на что распадаться.

Такие же аргументы остаются верными в том случае, когда четвертый генератор коммутирует с тремя первыми. Однако при этом масса частиц с необходимостью становится равной нулю.

Структура групп лептонных уравнений в зависимости от компонентов связности группы Лоренца выглядит таким образом:

1. Уравнение Дирака для дублета (e^+, e^-), $D_\gamma(\mathrm{II})$: $\{d_\gamma, b_\gamma, f_\gamma\}$.
$\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{II})] = -1$.

2. Уравнение Майораны для дублета массивных нейтрино, $D_\gamma(\mathrm{I})$:
$\{d_\gamma, c_\gamma, f_\gamma\}$. $\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{I})] = 1$.

3. Уравнение Паули для квартета безмассовых нейтрино, $D_\gamma(\mathrm{III})$:
$\{d_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, f_\gamma\}$. $\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{III})] = 0$.

4. Уравнение для безмассового (T)-синглета, $D_\gamma(\mathrm{IV})$: $\{b_\gamma\}$.
$\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{IV})] = -1$.

5. Уравнение для безмассового (PT)-синглета, $D_\gamma(\mathrm{V})$: $\{c_\gamma\}$.
$\mathrm{In}\,[D_\gamma(\mathrm{V})] = 1$.

Видно, что каждая группа и связанное с ней уравнение имеют свою собственную, индивидуальную структуру, что является необходимым условием иметь свои отличительные свойства.

8. НЕСТАБИЛЬНЫЕ ЛЕПТОНЫ

Попытки получить уравнения типа Дирака для нестабильных лептонов имеют давнюю историю [30]. Они начались с провозглашения $(\mu{-}e)$-универсальности и через несколько десятилетий были переформулированы в $(\mu{-}e)$-проблему [31]. Такое приходится воспринимать как отсутствие достаточной ясности и необходимость изучать проблему.

Выяснилось, что, оставаясь в рамках прежних пяти предположений, можно получить дополнительные лептонные уравнения [9]. Достигается поставленная задача введением еще одного (пятого) генератора для порождения новой группы волнового уравнения в рамках группы Лоренца и с сохранением при этом ковариантности формулировки уравнения. На основе теоремы (55) установлено, что существует три и только три возможности, которые допускают интерпретацию как новые волновые уравнения со своими дополнительными характеристиками. Произошло существенное усложнение структуры уравнений. В новых группах появляются подструктуры, допускающие физическую интерпретацию в терминах стабильных лептонов. В этом их отличие от групп стабильных лептонов, которое позволяет интерпретировать их как нестабильные в том случае, если масса частицы окажется больше суммы масс продуктов рапада.

Так, расширение группы γ-матриц Дирака ($D_\gamma(\mathrm{II})$) с помощью генератора Γ_5, антикоммутирующего с остальными четырьмя, такого, что $\Gamma_5^2 = I$, приводит к группе Δ_1 со СИ $\mathrm{In}\,[\Delta_1] = -1$. Расширение той же группы с помощью генератора, такого, что $\Gamma_5'^2 = -I$, приводит к группе Δ_3 со СИ $\mathrm{In}\,[\Delta_3] = 0$. Наконец, расширение группы γ-матриц дублетного нейтрино ($D_\gamma(\mathrm{I})$) с помощью $\Gamma_5''^2 = -I$, также антикоммутирующего с генераторами группы $D_\gamma(\mathrm{I})$, приводит к группе Δ_2 со СИ $\mathrm{In}\,[\Delta_2] = 1$.

Все три группы имеют ряд общих свойств. Порядок групп равен 64, центр каждой группы содержит четыре элемента. Элементы групп имеют порядок два или четыре, и каждая из групп имеет 34 сопряженных класса. Как следствие, группы имеют по 32 одномерных неприводимых представления и по два неэквивалентных четырехмерных. Кроме того, каждая группа имеет в своем составе по три и только три подгруппы 32-го порядка, которые изоморфны одному из пяти перечисленных вариантов групп для стабильных лептонов. Но состав подгрупп 32-го порядка в каждом случае свой, неповторяющийся.

Группа $\boldsymbol{\Delta_1}$ имеет следующие определяющие соотношения:

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 1,2,3,4,5. \tag{86}$$

Из них вытекает, что

$$\Gamma_6\Gamma_\mu = \Gamma_\mu\Gamma_6, \quad \Gamma_6^2 = I, \quad \mu = 1,2,3,4,5, \tag{87}$$

где $\Gamma_6 \equiv \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5$ и I — единичная матрица 4×4.

Равенство (87) означает, что Γ_6 является центром группы и что при переходе к неприводимому матричному представлению можно записать $\Gamma_6 = \pm I$.

Очевидно, что, когда μ и ν пробегают значения 1, 2, 3, 4, получается группа Дирака. Можно показать на основе (86), что Δ_1, помимо подгруппы Дирака, содержит две и только две подгруппы 32-го порядка. В результате структурный состав оказался таким:

$$\Delta_1 = \{D_\gamma(\mathrm{II}), \quad D_\gamma(\mathrm{III}), \quad D_\gamma(\mathrm{IV})\}. \tag{88}$$

Выражение (88) вместе со СИ $\mathrm{In}\,[\Delta_1] = -1$ идентифицирует группу Δ_1, т. е. делает ее физическое содержание отличным от остальных групп нестабильных лептонов. С помощью определяющих соотношений (86) нетрудно записать ЦС для Δ_1:

$$\Delta_1 = D_\gamma(\mathrm{II})[e + \Gamma_5] = d_\gamma[\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3][e + \Gamma_4][e + \Gamma_5]. \tag{89}$$

Вычисление неприводимых представлений на основе ЦС (89) приводит к явному виду Г-матриц для Δ_1:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Волновое уравнение формулируется в полной аналогии с уравнением Дирака при надлежащем выборе явного вида Г-матриц:

$$\left[\sum_{a=1}^{4}(\Gamma_a p_a) + \Gamma_6 m_1\right]\Psi = 0, \quad \Gamma_6 = \pm I, \tag{90}$$

где p_a, $a = 1, 2, 3, 4$, и m_1 — 4-импульс и масса нестабильной частицы. Запись уравнения в виде (90) оказалась возможной благодаря удачному совпадению обстоятельств, в силу которых размерность неприводимого представления для группы Δ_1 совпала с размерностью представления для подгруппы Дирака $D_\gamma(\mathrm{II})$. Два знака при $\Gamma_6 = \pm I$ связаны с двумя неэквивалентными представлениями, которые ассоциируются одно с частицей, а другое — с античастицей. Как показал анализ уравнений для стабильных лептонов, необходимым условием описания дублета частица–античастица является наличие в уравнении (T)-сопряженных компонентов связности представлений группы Лоренца. Данное требование выполняется для всех трех перечисленных групп.

На основе уравнения (90) можно получить уравнение для сохранения потока вероятности. Некоторое отличие от уравнения Дирака заключается в том, что здесь явное разделение уравнений для частицы и античастицы происходит с помощью $\Gamma_6 = \pm I$, т.е. на основе двух неэквивалентных представлений. В частности, если для описания частицы выбрать собственное представление группы Лоренца и $\Gamma_6 = I$, то уравнение для сохраняющегося тока принимает вид

$$\frac{\partial(\Psi^\dagger\Psi)}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(\Psi^\dagger\overline{\alpha}\Psi), \tag{91}$$

где $\overline{\alpha} = \{\alpha_1 = (\Gamma_4\Gamma_1),\ \alpha_2 = (\Gamma_4\Gamma_2),\ \alpha_3 = (\Gamma_4\Gamma_3)\}$, при этом Ψ есть решение уравнения $\left[\sum\limits_{a=1}^{4}(\Gamma_a p_a) + m_1\right]\Psi = 0$.

Наличие в составе Δ_1 подгруппы Дирака $(D_\gamma(\mathrm{II}))$ является прямой предпосылкой для описания заряженного дублета, на роль которого может претендовать $\mu^\pm$. При этом естественно возникает не только сходство с дублетом $e^\pm$, но и различия, связанные со структурой. Можно надеяться, что они послужат основой для решения застарелой проблемы $(\mu{-}e)$-универсальности [32].

Группа $\boldsymbol{\Delta_3}$ получается при расширении группы Дирака с помощью определяющих соотношений, похожих на (86). Отличие лишь в порядке пятого генератора Γ'_5:

$$\begin{aligned} \Gamma'_s\Gamma'_t + \Gamma'_t\Gamma'_s &= 2\delta_{st}, && s,t = 1,2,3,4,\\ \Gamma'_s\Gamma'_5 + \Gamma'_5\Gamma'_s &= 0, && s = 1,2,3,4,\\ \Gamma'^2_5 &= -1. \end{aligned} \tag{92}$$

Отсюда вытекает, что

$$\Gamma'_6 \equiv \Gamma'_1\Gamma'_2\Gamma'_3\Gamma'_4\Gamma'_5, \quad \Gamma'_6\Gamma'_\mu = \Gamma'_\mu\Gamma'_6, \quad \mu = 1,2,3,4,5. \tag{93}$$

По-прежнему Γ'_6 является центром группы и $\Gamma'^2_6 = -I$. В данном случае матричная реализация представления ведет к $\Gamma'_6 = \pm I, \pm iI$.

Состав группы изменился следующим образом:

$$\Delta_3 = \{D_\gamma(\mathrm{II}),\ D_\gamma(\mathrm{I}),\ D_\gamma(\mathrm{III})\}, \tag{94}$$

что соответствует СИ $\mathrm{In}\,[\Delta_3] = 0$. Подгруппа Дирака по-прежнему имеется в составе группы, но в целом он усложнился. В составе Δ_3 имеются две массивные составляющие, что делает различными массы Δ_1 и Δ_3, и поэтому частицу, связанную с Δ_3, можно считать более массивной. Кроме того, эти массивные составляющие $D_\gamma(\mathrm{II})$, $D_\gamma(\mathrm{I})$ выступают на равных правах в том смысле, что имеют размерности неприводимых представлений, совпадающие с размерностью Δ_3. Возможным следствием такого обстоятельства может являться большее число каналов для распадов. Это создает предпосылки связывать Δ_3 с дублетом $\tau^\pm$.

Четырехмерное неприводимое матричное представление для группы Δ_3 имеет следующий вид:

$$\Gamma'_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \Gamma'_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma'_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma'_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общие замечания, высказанные для предыдущего волнового уравнения (90), остаются в силе в том случае, когда $\Gamma'_6 = \pm I$:

$$\left[\sum_{a=1}^{4}(\Gamma'_a p_a) + \Gamma'_6 m_3\right]\Psi = 0, \quad \Gamma'_6 = \pm I. \tag{95}$$

Здесь p_a и m_3 — 4-импульс и масса нестабильной частицы, связанной с Δ_3. Уравнение (95) в зависимости от знака $\pm m$ описывает частицу или античастицу. Второе неэквивалентное представление группы Δ_3 связано со значениями $\Gamma_6 = \pm iI$. В силу двузначности $\Gamma_6 = \pm iI$ это второе представление тоже описывает частицу и античастицу. В силу неэквивалентности двух представлений частицы, с ними связанные, не являются тождественными. Таким образом, здесь получаем два зарядовых дублета: $(\tau)^{\pm}$ и $(\tau^*)^{\pm}$.

Группа $\boldsymbol{\Delta_2}$ определена с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \Gamma''_s\Gamma''_t + \Gamma''_t\Gamma''_s &= 2\delta_{st}, && s,t = 1,2,3, \\ \Gamma''_s\Gamma''_4 + \Gamma''_4\Gamma''_s &= 0, && s = 1,2,3, \\ \Gamma''^2_4 &= -1. && \\ \Gamma''_u\Gamma''_5 + \Gamma''_5\Gamma''_u &= 0, && u = 1,2,3,4, \\ \Gamma''^2_5 &= -1. && \end{aligned} \tag{96}$$

Отсюда следует, что

$$\Gamma''_6 \equiv \Gamma''_1\Gamma''_2\Gamma''_3\Gamma''_4\Gamma''_5, \quad \Gamma''_6\Gamma''_\mu = \Gamma''_\mu\Gamma''_6, \quad \mu = 1,2,3,4,5, \tag{97}$$

т. е. Γ''_6 входит в центр группы и является элементом второго порядка: $\Gamma''^2_6 = I$. В матричной реализации он принимает вид $\Gamma''_6 = \pm I$.

Состав группы отличается от двух предыдущих

$$\Delta_2 = \{D_\gamma(\mathrm{I}),\ D_\gamma(\mathrm{III}),\ D_\gamma(\mathrm{V})\}, \tag{98}$$

так же, как и СИ $\mathrm{In}\,[\Delta_2] = 1$. Сравнение состава Δ_2 с пятью приведенными ранее уравнениями для стабильных лептонов показывает, что выражение (98) содержит только нейтринные составляющие, включая массивную. Поэтому Δ_2 можно связывать с массивным нестабильным нейтрино.

Наиболее простая форма записи ЦС совпадает с (89). Различие между явным видом Г-матриц целиком определяется различием выражений (86) и (96):

$$\Delta_2 = D_\gamma(\mathrm{I})[e + \Gamma_5''] = d_\gamma[\Gamma_1'', \Gamma_2'', \Gamma_3''][e + \Gamma_4''][e + \Gamma_5''].\tag{99}$$

Получен следующий вид Г-матриц для группы Δ_2:

$$\Gamma_1'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma_2'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_3'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_4'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_5'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что здесь все пять матриц приведены к действительной форме. Такое преобразование возможно в соответствии с теоремой (55), так как СИ группы равен $\mathrm{In}\,[\Delta_2] = 1$. Данный факт подтверждает нейтральность частиц на основе группы Δ_2.

Волновое уравнение в данном случае не может быть представлено на основе подгруппы d_γ, генераторами которой являются $\Gamma_1'', \Gamma_2'', \Gamma_3''$. Запись волнового уравнения и последующего уравнения сохраняющегося тока возможна на основе группы f_γ. При выборе $\Gamma_6'' = 1$ оно имеет вид

$$\left[\sum_{a=1}^{4} (\Gamma_a''^{*} p_a) + m_2\right] \Psi = 0,\tag{100}$$

где $\Gamma_1''^{*} = (-\Gamma_1'')$, $\Gamma_2''^{*} = (\Gamma_1''\Gamma_3'')$, $\Gamma_3''^{*} = (\Gamma_2''\Gamma_1'')$, $\Gamma_4''^{*} = (\Gamma_1''\Gamma_4'')$. Уравнение описывает нестабильные, нейтральные, массивные частицы, спин которых направлен по импульсу или против него. Так же как и в случае группы Δ_1, неэквивалентные представления связаны с раздельным описанием частицы и античастицы.

9. ЗАМЕЧАНИЯ О ВОЛНОВЫХ ПРОЯВЛЕНИЯХ ЛЕПТОНОВ

Дирак получил свое знаменитое уравнение [1] путем разложения квадратичного уравнения KFG на произведение двух сомножителей линейных по первым производным — по времени и по пространственным координатам.

Все последующее развитие физики частиц показало, что уравнение KFG является описанием волнового процесса, который отображает только волновые свойства квантовых частиц. К ним относятся интерфереция, аннигиляция и осцилляции. С другой стороны, уравнения типа Дирака содержат иную информацию, в частности об индивидуальных свойствах тех же самых частиц. Она существенно дополняет волновые свойства и не может содержаться в KFG.

Необходимые условия для проявления всех трех типов волновых процессов можно обнаружить, учитывая структуру лептонных волновых уравнений и уравнение KFG в виде произведения двух сомножителей. Допустим, что в результате анализа одного из двух сомножителей, составляющих KFG, найден явный вид γ-матриц и установлена их физическая интерпретация. Пусть для конкретности первый сомножитель описывает e^{-}, т. е. электрон. Вопрос: как при этом интерпретировать содержание второго сомножителя? Оказалось, что его можно понимать по-разному, неоднозначно, но в одинаковой мере обоснованно и оправданно.

В первую очередь, можно убедиться, что второй сомножитель можно связать с уравнением для позитрона. Общепринятый выбор уравнения для электрона соответствует выбору четырех генераторов группы Дирака в виде определяющих соотношений (22): $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. Это равносильно тому, что в первом сомножителе все четыре γ-матрицы являются эрмитовыми, знак оператора Гамильтона — положительным и выражение для энергии принимает вид $E^2 = \overline{P}^2 + m^2$. Будем в таком случае уравнения Дирака в формате (21) называть уравнением Дирака на основе собственного представления группы Лоренца.

В п. 3.2 было показано, что ЦС уравнения Дирака может быть записана в другом формате (28), который будем называть (T)-сопряженным по отношению к формату на основе собственного представления группы Лоренца. Определяющие соотношения при этом принимают вид

$$\gamma'_\mu\gamma'_\nu + \gamma'_\nu\gamma'_\mu = -2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \tag{101}$$

где γ'_μ — матрицы того же самого неприводимого представления группы Лоренца, которые не совпадают с матрицами первого сомножителя. Матрицы, полученные на основе (101), являются антиэрмитовыми. Однако это не мешает получить уравнение для сохранения тока, если учесть, что при переходе к (T)-сопряженному формату происходит замена $t \to -t$. При таком положении, когда один сомножитель описывает электрон, а второй описывает позитрон, происходит обычная редукция двух сомножителей к уравнению KFG. В зависимости от конкретного выбора γ-матриц появляется общий для всего уравнения KFG множитель, равный по модулю единице.

Однако такая интерпретация второго сомножителя не является единственно возможной. Действительно, пусть первый сомножитель содержит генераторы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ и описывает электрон, а второй сомножитель описывает позитрон с помощью набора генераторов $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, \gamma'_4$. Принимая во внимание равенства (25) и (28), можно показать, что путем операции сдвига на группе, т. е. умножением слева (или справа) на элемент группы $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ первый набор генераторов переходит во второй:

1) $\gamma_5\gamma_1 = \gamma'_1$;
2) $\gamma_5\gamma_2 = \gamma'_2$;
3) $\gamma_5\gamma_3 = \gamma'_3$;
4) $\gamma_5\gamma_4 = \gamma'_4$.

Последующее умножение двух выражений, содержащих либо только e^-, либо только e^+, приводит к уравнению KFG с единым общим множителем матричного типа. Множитель можно понимать как пространственно-временное перераспределение вероятностей исходных волн де Бройля. Данное волновое явление подходит под определение интерференции. Таким образом, учет структуры дублетных лептонных уравнений, т. е. уравнений, описывающих только частицы и античастицы, совместно с уравнением KFG говорит о возможности интерференции для тождественных частиц и аннигиляции для пары частица–античастица. Стандартное представление об аннигиляции как превращении античастиц в фотоны в нашей схеме пока исключено, так как в ней отсутствуют фотоны.

Более сложную и более полную картину можно наблюдать в случае квартетных состояний. В лептонном секторе имеются два квартетных состояния — безмассовый нейтринный квартет (его начало заложено уравнением Паули) и квартет τ-лептонов. Общий признак квартетных состояний — равенство нулю СИ (55) для волнового уравнения. Главная особенность квартетов заключается в том, что в них имеются два дублетных состояния, т. е. два нетождественных состояния частица–античастица. Математически нетождественность выражается в том, что каждый дублет связан с одним из неэквивалентных представлений.

Так, квартет безмассовых нейтрино содержит две пары (T)-сопряженных состояний. Каждая пара содержит по два компонента связности группы Лоренца: d_γ, b_γ и f_γ, c_γ. Каждая пара отдельно редуцируется к уравнению типа KFG, и каждая составляет дублет. Но дублеты эти нетождественные. Они различаются спиновыми свойствами. В первом случае спин нейтрино согласно (65) может быть направлен вдоль любой из пространственных осей, тогда как во втором случае согласно тем же соотношениям спин ориентирован вдоль или против направления импульса. Кроме того, из набора равенств (51)–(54) следует, что одно дублетное состояние переходит в другое с помощью операции $\langle P\rangle$-сопряжения второго дублета. При этом открывается дополнительная воможность редукции к уравнению KFG помимо упомянутых выше, связанная с сочетанием неэквивалентных состояний [33]. Этот третий вариант проявления волновых свойств можно назвать осцилляциями. Такое положение идет вразрез с общепринятым мнением о том, что осциллировать могут только массивные нейтрино. Данное мнение можно будет принять как непреложный закон в том случае, если когда-либо на основе немногих, строго зафиксированных, весьма общих предположений будет доказано, что существование массивных нейтрино полностью исключает возможность существования безмассовых. В противном случае у нас нет никаких оснований отказываться ни от дополнительных, ни от альтернативных возможностей изучения данного вопроса.

В квартетном состоянии τ-лептонов положение в целом повторяется. Некоторые изменения вносятся из-за наличия у них массы [34]. Узкие и жесткие ограничения, принятые в начале нашей статьи, не позволяют сделать определенные заключения о равенстве или различии масс τ- и τ^*-лептонов. Это вносит некоторую неопределенность в вопрос об осцилляциях. Если предположить, что массы их различаются, то осцилляции становятся зависимыми от различия масс в том числе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный теоретико-групповой анализ лептонного сектора даже в рамках свободных состояний оказался содержательным в том смысле, что вскрыл ранее неустановленные факты. Методы теории групп позволили ответить на вопросы, ранее не возникавшие. Например, вопрос о полном числе лептонных уравнений с учетом исходных предположений или вопрос о структурных различиях лептонных уравнений и другие.

Выяснилось, что спин и структура являются базовыми характеристиками лептонов. Спин в данном контексте означает принадлежность к тому или иному неприводимому представлению группы Лоренца с первым весовым числом l_0, пробегающим бесконечный ряд значений $l_0 = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ Именно это число становится «спиновым» при формулировке волнового уравнения типа Дирака на основе того или иного неприводимого представления группы Лоренца. Для лептонов $l_0 = 1/2$, для фотонов $l_0 = 1$.

Известно, что стабильные лептоны являются конечными продуктами распадов практически всех нестабильных частиц. Поэтому можно утверждать, что они обладают простейшими структурами из всех возможных среди известных элементарных частиц [35]. С другой стороны, на примере нестабильных лептонов видно, что в рамках весьма общих требований (включая квантовое число спин) могут формироваться частицы с различными свойствами, включая различие масс на порядок и более за счет изменения структуры. Такое положение является прямым указанием на возможность формировать структуры калибровочных бозонов, кварков и адронов по алгоритму, аналогичному для лептонов [36]. На сегодняшний день не видно запретов на существование процессов самоорганизации частиц в условиях экстремального состояния материи, где начальным и первичным «строительным материалом» будет служить лептон-фотонная протоплазма. Процессы самоорганизации частиц — это, грубо говоря, процессы, обратные распадам частиц в вакууме. Можно надеяться, что тщательное сопоставление этих взаимно-обратных процессов, максимально свободное от феноменологических наслоений, послужит основой для формирования кинетики элементарных частиц, внесет ясность в проблему асимметрии материи и антиматерии во Вселенной и в природу необратимости на микроскопическом и макроскопическом уровнях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dirac P.* The Quantum Theory of the Electron // Proc. Roy. Soc. A. 1928. V. 117. P. 610–624.
2. *Pauli W.* Handbuch der Physik. Berlin: Verlag Julius Springer, 1933. V. 24. P. 226.
3. *Majorana E.* Teoria simmetrica dell elletrone e del positrone. Nuovo Cim. 1937. V. 14. P. 171.
4. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986.
5. *Космачев О. С.* Представления группы Лоренца и классификация стабильных лептонов. Препринт ОИЯИ Р2-2006-6. Дубна, 2006.
6. *Майорана Э.* Симметричная теория электрона и позитрона // ЭЧАЯ. 2003. Т. 34, вып. 1. С. 242.
7. *Дирак П.* Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960.
8. *Кондон Е., Шортли Г.* Теория атомных спектров. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
9. *Gusev A. A., Kosmachev O. S.* Structure Quantum Numbers and Unstable Leptons // Phys. Part. Nucl. Lett. 2008. V. 5. P. 67–71.
10. *Kosmachev O.* Problem of Quantum Numbers of Lepton Sector // Phys. Part. Nucl. Lett. 2010. V. 7. P. 149–174.
11. Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энцикл., 1984. 346 с.
12. Физическая энциклопедия. Т. 2. М.: Большая Рос. энцикл., 1990. 582 с.
13. Математическая физика. М.: Большая Рос. энцикл., 1998. 324 с.
14. *Conway J. H., Sloane N. J. A.* Sphere Packing, Latices and Groups. V. 1, 2. New York, 1998.
15. *Lomont L.* Applications of Finite Groups. London; New York: Acad. Press, 1959.
16. *Kosmachev O. S.* On the Projection Operators of the Irreducible Representation of Symmetric Groups // Symmetries and Algebraic Structures in Physics: Proc. of XVIII Intern. Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Moscow, 1990. New York: Nova Sci. Publ., 1991. P. 287–289.
17. *Космачев О. С., Лебедев И. А.* Группа кватернионов и ее расширения. Ч. I // Изв. АН РК. 1997. №6. С. 28–35.

18. *Космачев О. С., Лебедев И. А.* Группа кватернионов и ее расширения. Ч. II // Изв. АН РК. 1998. № 2. С. 47–54.
19. *Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А.* Кватернионы в релятивистской физике. Минск: Наука и техника, 1989. 32 с.
20. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 35 с.
21. *Космачев О. С.* Физическая интерпретация некоторых групповых алгебр // Письма в ЭЧАЯ. 2004. Т. 1, № 5. С. 50–57.
22. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958. 88 с.
23. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматгиз, 1958.
24. *Thaller B.* The Dirac Equation. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1992.
25. *Космачев О. С.* Ковариантная формулировка волнового уравнения для дублета массивных нейтральных лептонов. Препринт ОИЯИ Р4-2003-127. Дубна, 2003.
26. *Космачев О. С.* Об инвариантах уравнений типа Дирака. Препринт ОИЯИ Р2-2002-217. Дубна, 2002.
27. *Паули В.* Труды по квантовой теории. Т. 2. М.: Наука, 1977. С. 222.
28. *Weyl G.* Electron und Gravitation // Z. Phys. 1929. Bd. 53. S. 330–352.
29. *Паули В.* Общие принципы волновой механики. М.: Гостехтеоретиздат, 1947. С. 254.
30. *Марков М. А.* Нейтрино. М.: Наука, 1964.
31. Труды семинара по $(\mu - e)$-проблеме. М.: Наука, 1974.
32. *Комар А. А.* $(\mu - e)$-универсальность и слабые взаимодействия // Тр. семинара по $(\mu - e)$-проблеме. М.: Наука, 1974. С. 53–70.
33. *Kosmachev O.* On the Possibility of Massless Neutrino Oscillatios // PoS (Baldin ISHEPP XXI). 014.
34. *Kosmachev O.* Quartet of Tau-Leptons and Possibility of Their Oscillations // PoS (Baldin ISHEPP XXII). 030.
35. *Kosmachev O.* The Simplest and Universal Constituents for Description of Leptons and Hadrons // ЯФ. 2012. Т. 75, № 7. С. 940.
36. *Eliseev S., Kosmachev O.* From Lepton Protoplasm to the Genesis of Hadrons // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 668. P. 012109; 15th Intern. Conf. on Strangeness in Quark Matter, Dubna, July 6–11, 2015.

Получено 28 декабря 2017 г.

Редактор *Е. В. Григорьева*

Подписано в печать 06.03.2018.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,81. Уч.-изд. л. 3,48. Тираж 245 экз. Заказ № 59357.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/