

P11-2018-6

П. Г. Акишин, А. А. Сапожников

**ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ
МАГНИТОСТАТИКИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ
МАГНИТНЫХ СИСТЕМ**

Направлено в «Журнал вычислительной математики и математической физики»

Акишин П. Г., Сапожников А. А.

P11-2018-6

Интегральная формулировка задачи магнитостатики
для моделирования магнитных систем

В работе рассматриваются вопросы применения метода объемных интегральных уравнений для расчета магнитных систем. Обсуждаются основные этапы моделирования: дискретизация исходных уравнений, описание алгоритма разбиения области на элементы, вычисление матричных элементов дискретизованной задачи, решение соответствующей системы нелинейных уравнений. Приводятся результаты моделирования магнитных систем в рамках обсуждаемого метода, и дается сравнение с расчетами по другим программам.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2018

Akishin P. G., Sapozhnikov A. A.

P11-2018-6

The Integral Formulation of the Magnetostatic Problem
for Magnetic System Modelling

We consider the application of the volume integral method to the magnetic system calculations. The major stages of modelling process are discussed: the discretization of initial equations, the description of the algorithm for dividing the area into elements, the calculation of matrix elements for discretization problem and the solution for the obtained system of non-linear equations. The results of modelling of magnetic systems using the discussed method are presented and compared with calculations performed by other programs.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2018

ВВЕДЕНИЕ

В работе обсуждаются вопросы применения метода объемных интегральных уравнений магнитостатики для моделирования магнитных систем. Данный подход позволяет сузить решение задачи нахождения неизвестных до области, заполненной магнитным материалом. Однако при этом возникают проблемы с построением дискретизаций высокого порядка аппроксимаций ввиду сингулярности ядра интегральных уравнений, а также проблемы с вычислением большого числа матричных элементов дискретизованных задач. Для решения соответствующей системы нелинейных дискретизованных уравнений, как правило большой размерности, возможно применение только простых методов, не использующих обращение матриц. Разбиение исходной области, часто сложного вида, на элементы также является непростой задачей. В данной работе обсуждаются подходы для решения сформулированных задач, приводятся примеры использования разработанных методов для моделирования магнитных систем, дается сравнение полученных результатов с расчетами, полученными в рамках других постановок.

1. МЕТОД ОБЪЕМНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $\bar{B}(\bar{a})$, $\bar{H}(\bar{a})$, $\bar{M}(\bar{a})$ есть индукция, напряженность и намагниченность магнитного поля в точке \bar{a} . Величины \bar{B} , \bar{H} , \bar{M} связаны следующими нелинейными соотношениями:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \frac{\bar{B}(\bar{a})}{\mu(|\bar{B}(\bar{a})|)} \mu_0, \quad \bar{M}(\bar{a}) = \frac{\bar{B}(\bar{a})}{\mu_0} - \bar{H}(\bar{a}), \quad (1)$$

где μ_0 — абсолютная магнитная проницаемость вакуума; нелинейная функция $\mu(x)$ — магнитная проницаемость, вне железа тождественно равная единице, а внутри железа есть нелинейная функция, характеризующая связь между \bar{H} и \bar{B} для данного типа ферромагнетика. Имеет место следующее интегральное уравнение:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^S(\bar{a}) + \frac{1}{4\pi} \nabla_{\bar{a}} \int_G \left(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}},$$

где $\bar{H}^S(\bar{a})$ — поле от токовых обмоток; G — область, заполненная ферромагнетиком. Поле $\bar{H}^S(\bar{a})$ может быть найдено по закону Био–Савара:

$$\bar{H}^S(\bar{a}) = \frac{1}{4\pi} \text{Rot}_{\bar{a}} \int_{R^3} \frac{\bar{J}(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{a}|} dv_{\bar{x}}.$$

Сложность применения интегральной постановки связана с сингулярностью ядра интегральных уравнений. Именно этим объясняется использование только кусочно-постоянной аппроксимации неизвестных в пределах элементов разбиения области при дискретизации уравнений в известном программном комплексе GFUN [1]. Альтернативным методу коллокаций из [1] является замена точки наблюдения интегрированием по элементу разбиения, что позволяет использовать аппроксимации для неизвестных более высокого порядка. Наиболее удобным математическим подходом для построения подобных аппроксимаций является метод конечных элементов (МКЭ) [2].

Разобьем область G на тетраэдры $\{G_i\}$. Будем предполагать, что рассматриваемое разбиение $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$ удовлетворяет требованиям МКЭ. Пусть $\{\bar{P}_k, k = 1, \dots, L\}$ — набор всех вершин тетраэдров $\{G_i\}$. Обозначим $\bar{B}_k = \bar{B}(\bar{P}_k)$, $\bar{H}_k = \bar{H}(\bar{P}_k)$, $\bar{M}_k = \bar{M}(\bar{P}_k)$. Пусть $f_k(\bar{x})$ — функция формы, ассоциированная с вершиной \bar{P}_k . Функция $f_k(\bar{x})$ на каждом тетраэдре есть линейная функция, равная 1 в вершине \bar{P}_k и нулю в остальных. Используя эти обозначения, построим линейные аппроксимации для вектор-функций $\bar{B}(\bar{a})$, $\bar{H}(\bar{a})$, $\bar{M}(\bar{a})$:

$$\hat{B}(\bar{a}) = \sum_{k=1}^L f_k(\bar{a}) \bar{B}_k, \quad \hat{H}(\bar{a}) = \sum_{k=1}^L f_k(\bar{a}) \bar{H}_k, \quad \hat{M}(\bar{a}) = \sum_{k=1}^L f_k(\bar{a}) \bar{M}_k.$$

Сформулируем в рамках МКЭ интегральную постановку задачи магнитоэластики с использованием линейной аппроксимации намагниченности в пределах объемного элемента [3]:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^L \int_G f_i(\bar{a}) f_j(\bar{a}) \bar{H}_j dv_{\bar{a}} &= \int_G f_i(\bar{a}) \bar{H}^S(\bar{a}) dv_{\bar{a}} + \\ &+ \sum_{j=1}^L \int_G f_i(\bar{a}) \frac{\nabla_a}{4\pi} \left[\int_G f_j(\bar{x}) \left(\bar{M}_j, \nabla_a \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}} \right] dv_{\bar{a}}, \quad (2) \\ i &= \overline{1, L}. \end{aligned}$$

Пусть матрица $[C]$ есть матрица размерности $[3L \times 3L]$:

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{11}] & \cdots & [C_{1L}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [C_{L1}] & \cdots & [C_{LL}] \end{bmatrix},$$

где $[C_{ij}]$ — диагональная матрица размерности $[3 \times 3]$ вида

$$[C_{ij}] = \int_G f_i(\bar{a}) f_j(\bar{a}) dv_{\bar{a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $[A]$ есть матрица размерности $[3L \times 3L]$:

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & \cdots & [A_{1L}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [A_{L1}] & \cdots & [A_{LL}] \end{bmatrix},$$

где $[A_{ij}]$ — матрица размерности $[3 \times 3]$, такая, что для любого постоянного вектора \bar{M} справедливо соотношение

$$[A_{ij}] \bar{M} = \int_G f_i(\bar{a}) dv_{\bar{a}} \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi} \left[\int_G f_j(\bar{x}) \left(\bar{M}, \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right) dv_{\bar{x}} \right]. \quad (3)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \hat{B} &= (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_L)^T, \\ \widehat{M}(\hat{B}) &= (\mu_0 \bar{M}(\bar{B}_1), \mu_0 \bar{M}(\bar{B}_2), \dots, \mu_0 \bar{M}(\bar{B}_L))^T, \\ \hat{H}^S &= \left(\mu_0 \int_G f_1(\bar{a}) \bar{H}^S(\bar{a}) dv_{\bar{a}}, \mu_0 \int_G f_2(\bar{a}) \bar{H}^S(\bar{a}) dv_{\bar{a}}, \dots, \mu_0 \int_G f_L(\bar{a}) \bar{H}^S(\bar{a}) dv_{\bar{a}} \right)^T. \end{aligned}$$

Учитывая (1), систему (2) можно записать в виде

$$[C] \hat{B} = \hat{H}^S + ([A] + [C]) \widehat{M}(\hat{B}). \quad (4)$$

Используя функции формы более высокого порядка аналогично (2), можно сформулировать дискретизацию с квадратичной и более высокой аппроксимацией переменных в пределах элемента.

2. ГЕНЕРИРОВАНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ СЕТКИ

Для построения дискретизации интегральных уравнений (2) расчетная область должна быть разбита на тетраэдры, удовлетворяющие требованиям МКЭ. В зависимости от задачи на размер элементов сетки накладываются различные требования. В подобластях, где решение меняется быстро, необходима более детальная дискретизация и, как следствие, элементы должны быть меньше. Внутри областей медленного изменения решения подробное разбиение приводит к неоправданно большому числу сгенерированных элементов, что усложняет решение итоговой дискретизованной системы уравнений. Поэтому в таких областях элементы должны быть больше. Кроме того, построенные элементы сетки не должны вырождаться, так как вырожденные элементы влияют на аппроксимацию непрерывного решения и на сходимость итерационных методов, используемых для решения разностной задачи.

При дискретизации областей с неоднородным материалом на сетку накладываются дополнительные ограничения, связанные с границами раздела сред. Эти границы, имеющие, как правило, вид кривых в двумерном случае или поверхностей в трехмерном, не должны пересекаться ребрами сетки. По сути эти ограничения означают, что каждый полученный конечный элемент сетки должен состоять только из одного материала. Границы области могут быть приближены как линиями и плоскостями, так и кривыми и поверхностями второго и более порядков. Такие границы аппроксимируются результирующими элементами с шагом, зависящим от их размера на данном участке сетки.

В работе [4] исследуются вопросы, возникающие в процессе генерации многомерных конечно-элементных сеток, ориентированных на решение задач моделирования электромагнитных полей в крупных электрофизических установках, дается описание существующих методов генерации сеток, приводятся критерии оценки их качества. Также в работе [4] описывается созданный авторами генератор трехмерных адаптивных сеток 3DFEMMesh, в основу которого положен алгоритм, базирующийся на представлении расчетной области в виде объединения стандартных макроблоков с дальнейшей генерацией двумерных сеток на их границах и построением трехмерных сеток отдельно в каждом макроблоке. Данный генератор включен в библиотеку программ JINRLIB [5].

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Проблема определения коэффициентов матриц дискретизованных уравнений сводится к вычислению шестикратных, в общем случае сингулярных, интегралов из (3) по двум тетраэдрам. Ввиду большого числа определяемых

интегралов повышаются требования к оптимальности используемых кубатурных формул. Из-за сингулярности подынтегральной функции возникает необходимость привлечения кубатурных формул высокого порядка точности. В монографии [6] изучаются вопросы, связанные с общей теорией построения кубатурных формул, приведено большое количество кубатурных формул для различных типов областей. При вычислении интегралов, необходимых для записи дискретизованных уравнений, возникают ситуации, когда подынтегральная функция сингулярна. Возможны ситуации, когда подынтегральная функция сингулярна в каждой точке объема интегрирования. В этих случаях применение кубатурных формул невозможно, и возникает острая необходимость в развитии методов взятия интегралов подобного типа.

Прежде всего рассмотрим метод, позволяющий существенно сократить затраты машинного времени на вычисление коэффициентов дискретизованных систем. Коэффициенты матрицы $[A]$ из (3) явно выражаются через шестикратные объемные интегралы вида

$$J_{m,i,k}^{n,j,l} = \int_{G_m} \int_{G_n} \left[f_i(\bar{x}) f_j(\bar{a}) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial a_l} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|} \right] dv_{\bar{x}} dv_{\bar{a}}.$$

Учитывая, что $\{f_k(\bar{x})\}$ есть линейные функции, объемные интегралы из (3) можно редуцировать к поверхностным интегралам:

$$\begin{aligned} J_{m,i,k}^{n,j,l} = & \oint_{\partial G_m} \oint_{\partial G_n} \frac{f_i(\bar{x}) f_j(\bar{a}) (d\bar{S}_x, \bar{e}_k) (d\bar{S}_a, \bar{e}_l)}{|\bar{x} - \bar{a}|} - \\ & - 0,5 \frac{\partial f_i^m(\bar{x})}{\partial x_k} \frac{\partial f_j^n(\bar{a})}{\partial a_l} \oint_{\partial G_m} \oint_{\partial G_n} \frac{(d\bar{S}_x, d\bar{S}_a)}{|\bar{x} - \bar{a}|} - \\ & - 0,5 \frac{\partial f_i^m(\bar{x})}{\partial x_k} \oint_{\partial G_m} \oint_{\partial G_n} f_j(\bar{a}) (dS_a, \bar{e}_l) \frac{((\bar{x} - \bar{a}), d\bar{S}_x)}{|\bar{x} - \bar{a}|} - \\ & - 0,5 \frac{\partial f_j^n(\bar{a})}{\partial a_l} \oint_{\partial G_m} \oint_{\partial G_n} f_i(\bar{x}) (dS_x, \bar{e}_k) \frac{((\bar{a} - \bar{x}), d\bar{S}_a)}{|\bar{a} - \bar{x}|}. \quad (5) \end{aligned}$$

Множество G состоит из тетраэдров, соответственно, границы $\{\partial G_i\}$ есть треугольники. Таким образом, вычисление выражений из (5) сводится к различным вариантам интегрирования по двум треугольникам. Существуют четыре варианта взаимного расположения треугольников в пространстве: треугольники не пересекаются, треугольники имеют одну общую вершину, треугольники имеют две общих вершины и треугольники совпадают. Для первого варианта возможно применение кубатурных формул, однако для остальных случаев это невозможно из-за сингулярности подынтегральных выражений.

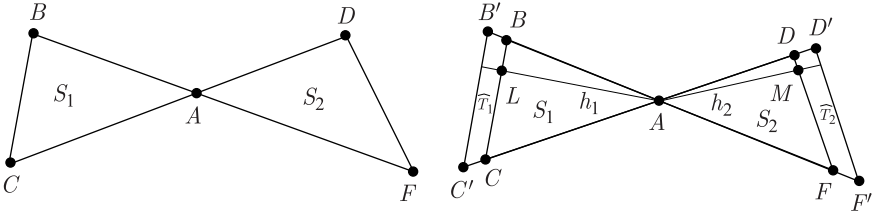


Рис. 1. Иллюстрация метода интегрирования однородных функций по двум треугольникам

Отметим, что подынтегральное выражение в (5) можно представить в виде суммы однородных функций. Будем считать, что функция $f(\bar{x})$ есть однородная функция, если для любого $\lambda > 0$:

$$f(\lambda\bar{x}) = \lambda^k f(\bar{x}).$$

Проиллюстрируем метод интегрирования однородных функций по двум треугольникам из [7] на примере вычисления интеграла

$$J_0 = \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_x dS_y}{|\bar{x} - \bar{y}|},$$

где S_1, S_2 изображены на рис. 1.

Пусть \widehat{S}_1 есть треугольник $AB'C'$, полученный из треугольника S_1 растяжением в λ раз относительно точки A . Аналогично \widehat{S}_2 есть треугольник $AD'F'$, полученный из треугольника S_2 растяжением в λ раз относительно точки A . Пусть $J(\lambda)$ есть

$$J(\lambda) = \int_{\widehat{S}_1} \int_{\widehat{S}_2} \frac{dS_x dS_y}{|\bar{x} - \bar{y}|}.$$

Заменой переменных $\bar{x}_1 = \lambda\bar{x}$, $\bar{y}_1 = \lambda\bar{y}$ интеграл $J(\lambda)$ приводится к виду

$$J(\lambda) = \lambda^3 \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_{x_1} dS_{y_1}}{|\bar{x}_1 - \bar{y}_1|}. \quad (6)$$

Пусть \widehat{T}_1 есть трапеция $B'BCC'$, \widehat{T}_2 — трапеция $DD'F'F$. Вычислим предел разностного отношения:

$$\frac{\partial J(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{(J(\lambda) - J(1))}{(\lambda - 1)}.$$

Используя аддитивность интеграла как функции множества, по которому он берется, имеем

$$\frac{\partial J(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{1}{\lambda - 1} \left[\left(\int_{\widehat{T}_1} \int_{S_2} + \int_{\widehat{T}_2} \int_{S_1} + \int_{\widehat{T}_1} \int_{\widehat{T}_2} \right) \frac{dS_{x_1} dS_{y_1}}{|\bar{x}_1 - \bar{y}_1|} \right]. \quad (7)$$

Переходя к пределу в (7), получаем

$$\frac{\partial J(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = h_1 \int_{BC} \int_{S_2} \frac{dS_{x_1} dS_{y_1}}{|\bar{x}_1 - \bar{y}_1|} + h_2 \int_{DF} \int_{S_1} \frac{dS_{x_1} dS_{y_1}}{|\bar{x}_1 - \bar{y}_1|}, \quad (8)$$

где h_1 — высота LA ; h_2 — высота AM . Дифференцируя (6) по λ и учитывая (8), получаем

$$J_0 = J(1) = \frac{1}{3} \left[h_1 \int_{BC} \int_{S_2} \frac{dS_{x_1} dS_{y_1}}{|\bar{x}_1 - \bar{y}_1|} + h_2 \int_{DF} \int_{S_1} \frac{dS_{x_1} dS_{y_1}}{|\bar{x}_1 - \bar{y}_1|} \right]. \quad (9)$$

Отметим, что выражения в правой части (9) есть регулярные интегралы, для вычисления которых можно использовать кубатурные формулы. В случае двух, трех общих вершин данный подход нужно применять повторно. Используя предлагаемую методику, все сингулярные интегралы из (5) можно редуцировать к суперпозиции регулярных интегралов меньшей кратности, для вычисления которых можно использовать кубатурные формулы.

4. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

При решении практических задач для достижения требуемой точности аппроксимации возникает необходимость дробления области G на все более мелкие элементы, что приводит к резкому возрастанию размерности решаемых нелинейных систем уравнений. Использование методов, требующих обращения матриц высокого порядка, крайне затруднительно. Поэтому для решения дискретизованных систем уравнений (4) используется следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} [C] \widehat{B}_{k+1} &= (\widehat{H}^S + ([A] + [C]) \widehat{M}(\widehat{B}_k)), \\ \widehat{B}_0 &= \bar{0}, \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Итерационный процесс заканчивается, когда невязка уравнений становится меньше наперед заданного числа ε . Для решения линейных систем уравнений

$$[C]\bar{x} = \bar{y}$$

используется метод неполного разложения Холецкого в сочетании с методом сопряженных градиентов [8].

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ

Метод объемных интегральных уравнений с линейной аппроксимацией намагниченности применялся для моделирования различных магнитных систем. На рис. 2, *а* приведена компьютерная модель проектируемого дипольного магнита эксперимента CBM (GSI, Дармштадт), построенная с помощью генератора 3DFEMMesh. В процессе моделирования учитывалась симметрия магнитного поля, позволяющая сократить число неизвестных в 8 раз. Одна восьмая часть магнита разбивалась на 5264 тетраэдра. Общее число вершин в этих тетраэдрах при этом равнялось 1363. На рис. 2, *б* приведено распределение модуля магнитного поля внутри магнита. На рис. 2, *в* дается сравнение результатов расчетов магнитного поля вдоль оси магнита, полученных по изложенной выше методике и по программе TOSCA [9].

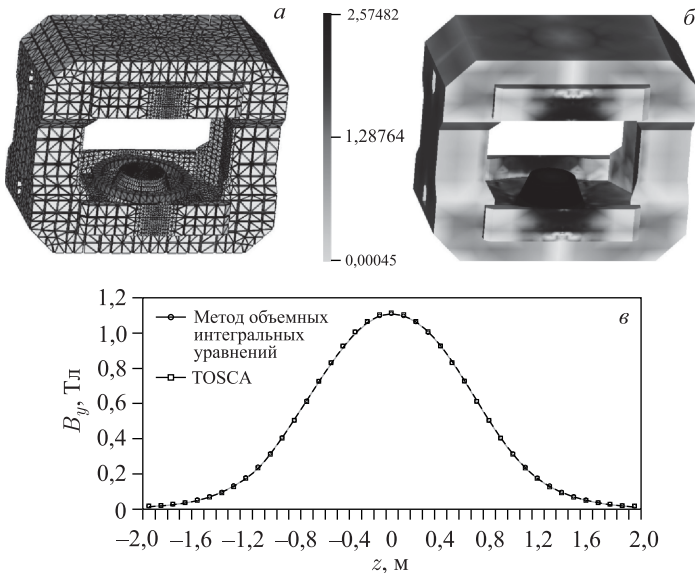


Рис. 2. 3D-моделирование дипольного магнита CBM (пояснение см. в тексте)

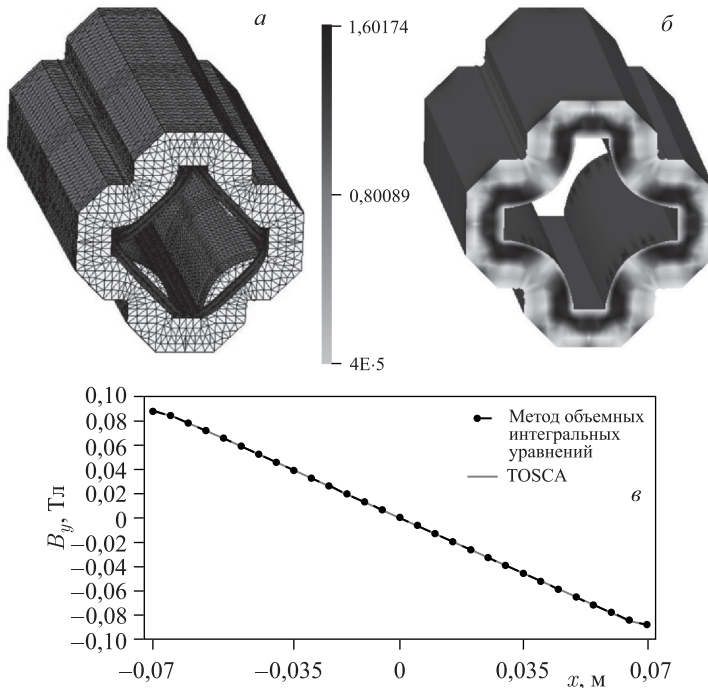


Рис. 3. 3D-моделирование квадрупольного магнита BOOSTER (пояснение см. в тексте)

Данная методика также применялась для моделирования квадрупольного магнита BOOSTER ускорительного комплекса NICA. В процессе моделирования учитывалась симметрия магнитного поля, позволяющая сократить число неизвестных в 16 раз. Одна шестнадцатая часть магнита разбивалась на 7040 тетраэдров. Общее число вершин в этих тетраэдрах при этом равнялось 1729. На рис. 3, *a* изображена компьютерная модель магнита. На рис. 3, *б* приведено распределение модуля магнитного поля внутри магнита. На рис. 3, *в* дается сравнение результатов расчетов B_y -компоненты магнитного поля вдоль оси O_x , полученных по методике, изложенной выше, и по программе TOSCA [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Armstrong A. G. et al. GFUN3D User Guide. RL-76-029/A, 1976.
2. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill. London, 1971.

3. Акишин П. Г., Сапожников А. А. Метод объемных интегральных уравнений в задачах магнитостатики // Вестник РУДН. Сер. «Математика. Информатика. Физика». 2014. № 2. С. 185–190.
4. Акишин П. Г., Сапожников А. А. Автоматическая генерация трехмерных сеток. Сообщение ОИЯИ 11-2015-58. Дубна, 2015.
5. <http://www.info.jinr.ru/programs/jinr/lib/3dfemmesh/>
6. Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
7. Акишин П. Г. Метод интегральных уравнений в задачах магнитостатики. Автореферат диссертации. ОИЯИ, 11-83-558. Дубна, 1983.
8. Meijerink J. A., Van der Vorst H. A. Math. Comput. 1977. V. 31. P. 148–162.
9. Simkin J., Trowbridge C. W. Three Dimensional Non-Linear Electromagnetic Field Computations Using Scalar Potentials // IEEE Proc. 1990. V. 127, No. 6.

Получено 21 февраля 2018 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 29.03.2018.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,81. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 215 экз. Заказ № 59374.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/