P4-2019-53

В. В. Пупышев [1]

ДВУМЕРНОЕ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ В СУММАРНОМ ПОЛЕ КУЛОНОВСКОГО И СТЕПЕННОГО ПОТЕНЦИАЛОВ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

---

[1] E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

Пупышев В. В. Р4-2019-53

Двумерное низкоэнергетическое рассеяние квантовой частицы
в суммарном поле кулоновского и степенного потенциалов

Исследуется двумерное рассеяние квантовой частицы силовым центром, воздействующим на нее посредством суперпозиции кулоновского потенциала и степенного потенциала $V_0\, r^{-\beta}$ с показателем $\beta \in (1, 2)$. Найдены в явном виде низкоэнергетические асимптотики всех парциальных фаз и амплитуд такого рассеяния.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2019

Pupyshev V. V. P4-2019-53

Two-Dimensional Low-Energy Scattering of a Quantum Particle
in the Combined Field of the Coulomb and Power Potentials

We study the two-dimensional scattering of a quantum particle by the force center acting on it through a superposition of the Coulomb and power potential $V_0\, r^{-\beta}$ with the exponent $\beta \in (1, 2)$. For this scattering, we found explicit low-energy asymptotics of all partial phase-shifts and amplitudes.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что квантовая частица p_1 движется в двумерной плоскости $\mathcal{P}$ и обладает положительной полной энергией E. Пусть точка O лежит в $\mathcal{P}$ и является неподвижным силовым центром, удаленным от частицы p_1 на расстояние r. По определению силовой центр O воздействует на эту частицу посредством суперпозиции $V(r)$ кулоновского потенциала $V_c(r) = \alpha V_0^c\, r^{-1}$ и центрального медленно убывающего потенциала $V_\beta(r) = V_0\, r^{-\beta}$:

$$V(r) = \alpha \frac{V_0^c}{r} + \frac{V_0}{r^\beta}, \quad \alpha = \pm 1, \quad V_0^c > 0, \quad V_0 \in (-\infty, \infty), \quad \beta \in (1, 2). \quad (1)$$

Наша главная задача такова: в обоих случаях $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$ найти в явном виде старшие слагаемые низкоэнергетических $(E \to 0)$ асимптотик всех парциальных фаз и амплитуд двумерного рассеяния частицы p_1.

Для решения этой задачи мы используем два известных метода: метод стационарной фазы [1] и метод построения асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром перед старшей производной [2].

В разд. 1 к уравнению такого типа мы сводим одномерное уравнение Шредингера, описывающее радиальное рассеяние частицы p_1 силовым центром O. Разд. 2 и 3 посвящены выводу и анализу низкоэнергетических асимптотик парциальных фаз и амплитуд двумерного рассеяния этой же частицы в кулоновском поле $\alpha V_0^c/r$ и в суммарном поле (1). В заключении подведены итоги наших исследований.

Сделаем несколько важных замечаний. В случае $V_0 = 0$ потенциал (1) становится кулоновским. Довольно полный анализ двумерного рассеяния квантовой частицы кулоновским потенциалом дан в работах [3–7]. В случае $V_0^c = 0$ потенциал (1) вырождается в степенной потенциал $V_0 r^{-\beta}$, $\beta \in (1, 2)$. Низкоэнергетические асимптотики парциальных фаз и дифференциального сечения двумерного рассеяния квантовой частицы таким потенциалом выведены в недавней работе [8]. Двумерное рассеяние медленной квантовой частицы в суммарном поле (1) ранее не исследовалось. Этот пробел современной теории двумерного рассеяния восполняет настоящая работа, инициированная давно известным исследованием [9] трехмерного рассеяния на потенциалах, содержащих степенные поправки к кулоновскому взаимодействию.

1. РАДИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОГО РАССЕЯНИЯ

Символами $\hbar$ и m_1 обозначим постоянную Планка и массу частицы p_1. Модуль k волнового числа, кулоновскую единицу R измерения расстояния r и параметр Зоммерфельда η определим стандартным образом:

$$k \equiv \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m_1 E}, \quad R \equiv \frac{\hbar^2}{2m_1 V_0^c}, \quad \eta \equiv \frac{\alpha}{2kR}.$$

По определению суммарный потенциал (1) зависит только от расстояния r. Как известно [10], при двумерном рассеянии потенциалами такого типа сохраняются два квантовых числа: модуль волнового числа k и полуцелое число $\lambda = m - 1/2$, где $m = 0, 1, \ldots$. Радиальная волновая функция $\tilde{u}_\lambda(r,k)$ состояния рассеяния $|k,\lambda\rangle$ квантовой частицы p_1 удовлетворяет одномерному уравнению Шредингера

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m_1}\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}\right) - \alpha\frac{V_0^c}{r} - \frac{V_0}{r^\beta} + E\right]\tilde{u}_\lambda(r,k) = 0, \qquad r>0, \quad E>0, \tag{2}$$

с условием

$$\tilde{u}_\lambda(r,k) = O(r^{\lambda+1}), \quad r \to 0, \tag{3}$$

и условием

$$\tilde{u}_\lambda(r,k) = \sin\left[\rho - \eta\ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta_m^c(\eta) + \tilde{\delta}_m(k)\right] + O(\rho^{-1}), \qquad \rho \equiv kr \to \infty. \tag{4}$$

Это условие содержит фазу рассеяния $\delta_m^c(\eta)$ кулоновским потенциалом $\alpha V_0^c\, r^{-1}$ и фазу рассеяния $\tilde{\delta}_m(k)$, порожденную потенциалом $V_0\, r^{-\beta}$ в кулоновском поле.

Перепишем задачу рассеяния (2)–(4) в виде, наиболее удобном для наших исследований.

Сначала, используя обезразмеривающую подстановку

$$q = kR, \quad y = q^2\frac{r}{R}, \quad \eta \equiv \frac{\alpha}{2q}, \quad \rho = kr = \frac{y}{q}, \quad b \equiv V_0\, R^{2-\beta}\,\frac{2m_1}{\hbar^2}$$

и полагая

$$\tilde{u}_\lambda(r,k) = u_\lambda(y,q), \quad \delta_m(q) = \tilde{\delta}_m(k),$$

сведем уравнение (2) к уравнению

$$q^2\,\frac{d^2}{dy^2}\,u_\lambda(y,q) + \left[1 - q^2\,\frac{\lambda(\lambda+1)}{y^2} - \frac{\alpha}{y} - \frac{\varepsilon}{y^\beta}\right]\,u_\lambda(y,q) = 0, \qquad \varepsilon \equiv b\,q^{2\beta-2}, \quad y>0. \tag{5}$$

Затем той же подстановкой из граничных условий (3) и (4) выведем условие

$$u_\lambda(y,q) = O(y^{\lambda+1}), \quad y \to 0, \tag{6}$$

и условие

$$u_\lambda(y,q) = \sin\left[\rho - \eta\,\ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta_m^c(\eta) + \delta_m(q)\,\right] + O(\rho^{-1}), \qquad \rho \to \infty. \tag{7}$$

Дадим определение предела низких энергий рассеяния. Таким пределом мы называем предел $q \to 0$ при фиксированных значениях квантового числа λ и всех параметров R, α, V_0 и β. В этом пределе модуль параметра Зоммерфельда $\eta = \alpha/(2q)$ неограниченно возрастает, а параметр $\varepsilon = b\,q^{2\beta-2}$ является малым: $|\eta| \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ при $q \to 0$.

2. АСИМПТОТИКИ ФАЗ РАССЕЯНИЯ

Используем терминологию, принятую в асимптотических методах [2]. Асимптотики фаз $\delta_m^c(\eta)$ и $\delta_m(q)$, справедливые при $q \to 0$ и любом номере m, называются равномерными по этому номеру низкоэнергетическими асимптотиками. Асимптотики этих же фаз в пределе $q \to 0$, но при дополнительном условии $m \ll q^{-1}$ или $m \gg q^{-1}$ считаются неравномерными низкоэнергетическими асимптотиками при малых или же больших значениях номера m.

В п. 2.1 приводятся формулы, которые окажутся ключевыми для вывода в п. 2.2 и п. 2.3 равномерных и неравномерных низкоэнергетических асимптотик фаз δ_m^c и δ_m. Для полноты в п. 2.4. дан альтернативный к изложенному в п. 2.1 вывод низкоэнергетических асимптотик фаз δ_m.

2.1. Ключевые формулы. В пределе $q \to 0$ уравнение (5) является двучленным дифференциальным уравнением второго порядка с малым параметром q^2 перед старшей производной. Применим известный метод [2] построения асимптотических решений уравнений такого типа в случае физических граничных условий (6) и (7).

Следуя этому методу, в уравнении (5) выполним замену

$$\lambda(\lambda+1) \to (\lambda+1/2)^2 = m^2$$

и представим искомые равномерные асимптотики фаз δ_m^c и δ_m равенством

$$\delta_m^c(\eta) = \lim_{y\to\infty}\left[\frac{1}{q}\int\limits_{y_c}^{y} p_c(z,q)\,dz - \frac{1}{q}\int\limits_{y_0}^{y} p_0(z,q)\,dz + \eta\,\ln(2\rho)\right] + O(q), \qquad q \to 0, \tag{8}$$

и равенством

$$\delta_m(q) = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{1}{q}\int\limits_{y_\beta}^{y} p(z,q)\,dz - \frac{1}{q}\int\limits_{y_c}^{y} p_c(z,q)\,dz\right) + O(q), \quad q\to 0. \qquad (9)$$

В этих равенствах подынтегральные функции определены формулами

$$p_0(y,q) \equiv \sqrt{1-\left(q\,\frac{m}{y}\right)^2}, \quad p_c(y,q) \equiv \sqrt{p_0^2(y,q) - \frac{\alpha}{y}},$$
$$p(y,q) \equiv \sqrt{p_c^2(y,q) - \frac{\varepsilon}{y^\beta}}, \qquad (10)$$

а нижние пределы y_0 и y_c интегралов вычисляются по формулам

$$y_0 = mq, \quad 2y_c = \alpha + \sqrt{1+(2mq)^2}, \quad \alpha = \pm 1, \quad m \geqslant 0. \qquad (11)$$

В случае $m > 0$ пределы y_0 и y_c являются наибольшими положительными нулями функций p_0 и p_c. Явное представление наибольшего положительного нуля y_β функции p неизвестно. Если эта функция не имеет положительных нулей, то полагается $y_\beta = 0$.

2.2. Асимптотики кулоновских фаз. Используем формулы (8), (10) и (11). В ключевом представлении (8) оба интеграла являются интегралами типа

$$\int \frac{Y(z,q)}{z}\,dz, \quad Y(z,q) = z^2 + a_1\,y + a_2,$$

и поэтому сводятся к суммам (см. [11], с. 101, формула (14))

$$\sqrt{Y(z,q)} + \frac{a_1}{2}\int \frac{dz}{Y(z,q)} + a_2 \int \frac{dz}{z\sqrt{Y(z,q}},$$

содержащим два табличных интеграла (см. [11], с. 102 и 103, формулы (8) и (27)). После вычисления таких интегралов и применения формулы (8) получается следующая равномерная низкоэнергетическая асимптотика кулоновской фазы:

$$\delta_m^c(\eta) = \frac{\eta}{2}\,\ln\left[\,m^2+\eta^2\,\right] - \eta + m\,\mathrm{arctg}\,\frac{\eta}{m} + O(q), \quad m = 0,1,\ldots \qquad (12)$$

Представим эту асимптотику в более удобном для наших исследований виде

$$2\delta_m^c(\eta) = \omega(\eta) + |\eta|\,c_m(\eta) + O(q), \quad m = 0,1,\ldots, \qquad (13)$$

где по определению

$$\omega(\eta) \equiv 2\,\eta\,(\ln|\eta| - 1),$$
$$c_m(\eta) \equiv \alpha\,\ln\left[1 + \left(\frac{m}{\eta}\right)^2\right] + 2\alpha\,\frac{m}{|\eta|}\,\mathrm{arctg}\,\frac{|\eta|}{m}, \quad \alpha = \mathrm{sign}\,\eta. \tag{14}$$

Из формул (13) и (14) следуют две неравномерные низкоэнергетические асимптотики кулоновских фаз: асимптотика при малых значениях номера m

$$2\delta^c_m(\eta) = \omega(\eta) + \alpha\,\pi\,m + O(q), \quad m \ll q^{-1}, \tag{15}$$

и асимптотика при больших значениях номера m

$$\delta^c_m(\eta) = \eta\,\ln m + O(q), \quad m \gg q^{-1}. \tag{16}$$

Отметим, что при условии $2m \gg 1$ асимптотика (12) близка к известной асимптотике [5]

$$\delta^c_m(\eta) = \frac{\eta}{2}\,\ln\left[(m+1/2)^2 + \eta^2\right] - \eta + m\,\mathrm{arctg}\,\frac{\eta}{m+1/2} + O(q),$$
$$m = 0, 1, \ldots$$

порожденной явным представлением [3, 4] кулоновской фазы через гамма-функцию Γ:

$$\delta^c_m(\eta) = \arg\Gamma(m + 1/2 + \imath\,\eta).$$

2.3. Асимптотики фаз δ_m в линейном по малому параметру ε приближении. Представление (9) фазы δ_m содержит интеграл от функции p, заданной формулами (10). Этот интеграл не удалось выразить через элементарные или же известные специальные функции. Поэтому пришлось использовать его линейное по малому параметру $\varepsilon = b\,q^{2\beta-2}$ приближение. Вывод и обоснование такого приближения начнем с анализа достаточных условий, при которых в области $y \geqslant y_c$ слагаемое $b\,q^{2\beta-2}y^{-\beta} = \varepsilon y^{-\beta}$ функции $p^2(y,q)$, порожденное потенциалом V_0/r^β, является поправкой к образу α/y кулоновского потенциала V^c_0/r. Для этого разрешим систему двух неравенств

$$|b|q^{2\beta-2}y^{-\beta} \ll y^{-1}, \quad 2y \geqslant 2y_c = \alpha + \sqrt{1 + (2mq)^2}.$$

Эта система совместна, если выполняются неравенства

$$0 < q^2, \quad q^2 \ll m^2\,|b|^{2/(1-\beta)} + \alpha\,|b|^{1/(1-\beta)}. \tag{17}$$

Если $\alpha = 1$ и $q \ll |b|^{1/2(1-\beta)}$, то эти неравенства верны при любых значениях параметра b и номера $m = 0, 1, \ldots$. Пусть $\alpha = -1$. Тогда обсуждаемые неравенства могут выполняться при любом значении параметра b, но при условии $m > |b|^{1/2(\beta-1)}$. В случае $|b| < 1$ этому условию удовлетворяют все значения номера m, за исключением нулевого.

Предположим, что все указанные выше условия выполнены. Тогда в сумме $p^2(z,q)$ слагаемое $b\,q^{2\beta-2}y^{-\beta}$ является малым. Поэтому в представлении (9) фазы δ_m интеграл от функции $p(z,q)$ можно разложить в ряд Маклорена в точке $\varepsilon = 0$ и таким образом получить следующее линейное по малому параметру $\varepsilon = 0$ приближение низкоэнергетической асимптотики:

$$\delta_m(q) = -\frac{b}{2}\,q^{2\beta-3}\,\chi(q) + O(q), \quad \chi(q) \equiv \int\limits_{y_c}^{\infty} \frac{dz}{z^\beta p_c(z,q)}. \tag{18}$$

Исследуем это приближение. Сначала для краткости записи положим

$$\nu \equiv \frac{1}{2}, \quad \mu \equiv \frac{3}{2} - \beta; \quad v \equiv \sqrt{1 + (2mq)^2} = \sqrt{1 + (m/\eta)^2}.$$

Теперь вычислим интеграл $\chi(q)$. С помощью тождества

$$p_c(z,q) \equiv z^{-1}\,\left[\,(z - y_c)(z + y_c - \alpha)\,\right]^{1/2}$$

и подстановки $z = t + y_c$ сведем этот интеграл к интегралу

$$\chi(q) = \int\limits_0^{\infty} t^{-1/2}(t + y_c)^{1-\beta}\,(t + v)^{-1/2}\,dt.$$

Такой интеграл является табличным и представляется через бета-функцию B и гипергеометрический ряд ${}_2F_1$ формулой (см. [11], с. 303, формула (24))

$$\chi(q) = v^{-1/2}\,y_c^\mu\,B\left(\beta - 1, \frac{1}{2}\right){}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \beta - \frac{1}{2}; 1 - \frac{y_c}{v}\right).$$

Выразим в этом представлении ряд ${}_2F_1$ через присоединенную функцию Лежандра первого рода P_μ^ν по известной формуле (см. [12], с. 460, формула (49))

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \beta - \frac{1}{2}; 1 - \frac{y_c}{v}\right) = \Gamma\left(\beta - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^{\mu/2}\,P_\nu^\mu(\alpha/v).$$

В итоге получатся равенства

$$\begin{gathered} \chi(q) = -\frac{2}{b}\,q^{3-2\beta}\,h(\alpha v), \\ h(\alpha v) \equiv -\frac{b}{2^\mu}\,\Gamma\,(\beta - 1)\,\sqrt{\frac{\pi}{4v}}\,(v^2 - 1)^{\mu/2}\,P_\nu^\mu(\alpha/v). \end{gathered} \tag{19}$$

Используя их и формулы (18), находим явную низкоэнергетическую асимптотику фазы δ_m:

$$\delta_m(q) = q^{2\beta-3}\, h(\alpha v) + O(q) =$$
$$= -\frac{b}{2^\mu}\, q^{2\beta-3}\, \Gamma\,(\beta-1)\, \sqrt{\frac{\pi}{4v}}\, (v^2-1)^{\mu/2}\, P_\nu^\mu(\alpha/v) + O(q). \quad (20)$$

Напомним, что в силу условия (17) фаза δ_m имеет такую асимптотику в случае $\alpha = 1$, $m = 0, 1, \dots$ или же в случае $\alpha = -1$, но $m > |b|^{1/2(\beta-1)}$.

Приступим к выводу низкоэнергетической асимптотики фазы $\delta_m(q)$ при больших значениях $(mq \gg 1)$ ее номера m.

Пусть $mq \gg 1$. Тогда $v \gg 1$, а $1/v \ll 1$. Поэтому в равенстве (20) аргумент $t = \alpha/v$, $\alpha = \pm 1$, функции $P_\nu^\mu(t)$ близок к нулю. Значение этой функции в точке $t = 0$ определяется известной формулой (см. [13], с. 146, формула (20)):

$$P_\nu^\mu(0) = \frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}}\, \cos\left[\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right]\, \Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right). \quad (21)$$

Благодаря этой формуле равенство (20) в пределе $v \to \infty$ вырождается в следующую низкоэнергетическую асимптотику фазы δ_m, $\alpha = \pm 1$, при больших значениях ее номера:

$$\delta_m(q) = -\frac{b}{2^\beta}\, q^{2\beta-3}\, (mq)^{1-\beta} \cos\left[\frac{\pi}{2}(\beta-1)\right] B\left(\beta-1, 1-\frac{\beta}{2}\right) + O(q), \quad m \gg q^{-1}. \quad (22)$$

Вследствие такой асимптотики в пределе $m \to \infty$ модули всех фаз δ_m монотонно убывают как $O(m^{1-\beta})$. Стоит отметить, что согласно равенству (16) в том же пределе модули всех кулоновских фаз δ_m^c неограниченно возрастают как $O(q^{-1} \ln m)$.

Теперь выведем низкоэнергетические асимптотики фазы δ_m при малых значениях ее номера m. Для этого придется рассмотреть два случая: $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$.

Случай $\alpha = 1$, $mq \ll 1$, но $m \geqslant 1$. В этом случае $1/v \approx 1$, и поэтому в равенствах (20) аргумент $t = \alpha/v = 1/v$ функции $P_\nu^\mu(t)$ близок к единице. Асимптотика этой функции в пределе $t \to 1-$ известна (см. [13], с. 164, формула (8)):

$$P_\nu^\mu(t) \sim \frac{2^{\mu/2}}{\Gamma(1-\mu)}\, (1-t)^{-\mu/2}, \quad t \to 1-. \quad (23)$$

Используя такую асимптотику, перейдем в равенстве (20) к пределу $v \to 1$. В итоге получим низкоэнергетическую асимптотику фазы δ_m при малых значениях ее номера:

$$\begin{gathered} \delta_m(q) = -\frac{b}{2}\, q^{2\beta-3}\, B\left(\beta-1, \frac{1}{2}\right) + O(q), \\ \alpha = 1, \quad m = 0, 1, \dots n,\ n \ll q^{-1}. \end{gathered} \tag{24}$$

Перечислим физически интересные следствия этой асимптотики: в пределе $q \to 0$ модули всех фаз $\delta_m(q)$ с малым номером m в случае $1 < \beta < 3/2$ сходятся к одной и той же ненулевой константе, если $\beta = 3/2$, а в случае $3/2 < \beta < 2$ обращаются в нуль. Отметим, что согласно равенству (15) в пределе $q \to 0$ модули кулоновских фаз $\delta_m(q)$ с малым номером m возрастают быстрее модулей фаз $\delta_m(q)$, $\beta < 3/2$, а именно как $O(q^{-1}\ln q)$.

Случай $\alpha = -1$, $mq \ll 1$, но $m > |b|^{1/2(\beta-1)}$. В этом случае $1/v \approx 1$, и поэтому в равенстве (20) аргумент $t = \alpha/v = -1/v$ функции $P^\mu_\nu(t)$ близок к минус-единице. Поведение этой функции в пределе $t \to -1+$ определяется известными формулами (см. [13], с. 165, формулы (13)–(15)). В нашем случае $(\mu = 3/2 - \beta, \nu = -1/2)$ из этих формул следует асимптотика

$$\begin{gathered} P^\mu_\nu(-1/v) \sim \frac{\Gamma(-\mu)}{\Gamma^2(\beta-1)} \left(\frac{2v}{v-1}\right)^{-\mu/2}, \\ \mu < 0, \quad \beta > 3/2, \quad v \to 1+, \end{gathered} \tag{25}$$

содержащая константу Эйлера γ асимптотика

$$\begin{gathered} \pi\, P^\mu_\nu(-1/v) \sim \gamma + 5\, \ln 2 - \ln(1 - 1/v), \\ \mu = 0, \quad \beta = 3/2, \quad v \to 1+; \end{gathered} \tag{26}$$

и асимптотика

$$\begin{gathered} \pi\, P^\mu_\nu(-1/v) \sim \Gamma(\mu) \left(\frac{2v}{v-1}\right)^{\mu/2}, \\ \mu > 0, \quad \beta < 3/2, \quad v \to 1+\,. \end{gathered} \tag{27}$$

Используем эти асимптотики и перейдем в равенстве (20) к пределу $v \to 1+$. В результате получится низкоэнергетическая асимптотика фазы δ_m при малых $(m \ll q^{-1})$, но превышающих число $|b|^{1/2(\beta-1)}$ значениях ее номера m. Представим такую асимптотику формулами

$$\delta_m(q) = -\frac{b}{2}\, m^{3-2\beta}\, B\left(\beta - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + O(q), \quad \beta > 3/2; \tag{28}$$

формулами

$$\delta_m(q) = b\,\left[\ln(mq) - \frac{\gamma}{2} - 2\ln 2\right] + O(q), \quad \beta = 3/2; \tag{29}$$

и формулами

$$\delta_m(q) = -\frac{b}{2}\,q^{2\beta-3}\,B\left(\frac{3}{2} - \beta, \beta - 1\right) + O(q), \quad \beta < 3/2. \tag{30}$$

Согласно этим формулам при условиях $q \to 0$, $m \ll q^{-1}$ и $m > |b|^{1/2(\beta-1)}$ модули фаз $\delta_m(q)$ сходятся к ненулевым константам, если $\beta > 3/2$, а в случае $\beta \leqslant 3/2$ неограниченно возрастают. Отметим, что в силу равенства (15) при $q \to 0$ модули кулоновских фаз $\delta^c_m(\eta)$ с малым номером m возрастают быстрее модулей фаз $\delta_m(q)$, $\beta \leqslant 3/2$, а именно как $O(q^{-1}\ln q)$.

2.4. Асимптотики фаз δ_m в особом случае. Для полноты исследования необходимо найти низкоэнергетические асимптотики фаз δ_m с малыми номерами ($mq \ll 1$) в особом случае $\alpha = -1$, но $m = 0, 1, \ldots, m_0$, где m_0 — целая часть числа $|b|^{1/2(\beta-1)}$. В этом случае система (17) несовместна, и поэтому исходное низкоэнергетическое приближение (9) не сводится к равенству (18). Выведем другое низкоэнергетическое приближение фазы δ_m. Для этого применим к нашей задаче рассеяния (5)–(7) незаслуженно забытый метод Дашена [14]. Отметим, что в случае $b = 0$ решением $u_\lambda(y,q)$ этой задачи является известная [5] регулярная функция Кулона $F_\lambda(\rho,\eta)$ полуцелого порядка λ. Для сокращения записи символом $a'(x_1,x_2)$ будем обозначать производную функции $a(x_1,x_2)$ по аргументу x_1.

Согласно методу Дашена положим

$$t^2_c(y,q) \equiv 1 - q^2\frac{\lambda(\lambda+1)}{y^2} + \frac{1}{y}, \quad \lambda = m - 1/2,$$

а фазовые функции ψ_c и ψ определим равенствами

$$\begin{aligned} \psi_c(y,q) &= \operatorname{arctg}\left[t_c(y,q)\frac{F_\lambda(\rho,\eta)}{F'_\lambda(\rho,\eta)}\right], \\ \psi(y,q) &= \operatorname{arctg}\left[q^{-1}\,t_c(y,q)\frac{u_\lambda(y,q)}{u'_\lambda(y,q)}\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Сразу отметим, что благодаря граничному условию (7) эти равенства при любом m, но больших значениях аргумента ρ вырождаются в асимптотические соотношения

$$\psi_c(y,q) \sim \rho - \eta\,\ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta^c_m(\eta),$$

$$\psi(y,q) \sim \psi_c(y,q) + \delta_m(q), \quad \rho = y/q \to \infty.$$

Поэтому фазу рассеяния $\delta_m(q)$ можно вычислить по формулам

$$\xi(y,q) = \psi(y,q) - \psi_c(y,q), \quad \delta_m(q) = \lim_{y\to\infty} \xi(y,q).$$

В методе Дашена фазовая функция ξ определяется как решение задачи Коши на полуоси $y > 0$. Перейдем к формулировке такой задачи в нашем случае.

Начнем с определения граничного условия для функции ξ. Заметим, что при каждом $m > 0$ функция t_c, а значит, функции ψ_c и ψ их разность ξ обращаются в нуль только в одной точке $y = z_c$, которая определяется равенством

$$2z_c = \sqrt{1 + 4\lambda(\lambda+1)q^2} - 1, \quad m \neq 0. \tag{32}$$

В случае $m = 0$ функция t_c не имеет нулей на полуоси $y > 0$. В этом случае положим $z_c = 0$. Используя граничное условие (6), перейдем в равенствах (31) к пределу $y \to z_c = 0$ и таким образом покажем, что в точке $y = z_c = 0$ обе функции ψ_c и ψ равны $\pi/4$. Следовательно, в этой точке разность $\xi = \psi - \psi_c$ этих функций обращается в нуль.

Итак, при любом m функция $\xi(y,q)$ подчиняется граничному условию $\xi(y,q) = 0$, $y = z_c$.

Теперь для этой функции выведем дифференциальное уравнение. Для этого продифференцируем равенства (31) по аргументу y и, используя уравнение Шредингера (5), выразим производные второго порядка F''_λ и u''_λ через соответствующие функции F_λ и u_λ. Не указывая аргументы всех функций, представим полученные уравнения в виде уравнения

$$\psi'_c = \frac{1}{q}\, t_c + \frac{1}{2}\,\frac{t'_c}{t_c}\, \sin 2\psi_c, \quad y > z_c,$$

и уравнения

$$\psi' = \frac{1}{q}\, t_c + \frac{1}{2}\frac{t'_c}{t_c}\, \sin 2\psi - \frac{b}{2}\,\frac{q^{2\beta-3}}{y^\beta t_c}\,(\cos 2\psi - 1), \quad y > z_c.$$

Вычтем левые и правые части эти уравнений. В итоге для функции ξ получится уравнение

$$\xi'(y,q) = -\frac{b}{2}\frac{q^{2\beta-3}}{y^\beta t_c} + \frac{t'_c}{t_c}\, \cos(2\psi_c + \xi)\, \sin\xi + \frac{b}{2}\,\frac{q^{2\beta-3}}{y^\beta t_c}\, \cos(2\psi_c + 2\xi),$$
$$y > z_c.$$

Это уравнение вместе с полученным выше граничным условием $\xi(y,q) = 0$, $y = z_c$, является искомой задачей Коши для фазовой функции $\xi(y,q)$, которая стремится к фазе $\delta_m(q)$ при $y \to \infty$. На полуоси $y \geqslant y_c$ такая задача Коши эквивалентна интегральному уравнению

$$\xi(y,q) = \phi_0(y,q) + \int\limits_{y_c}^{y} \frac{t_c'}{t_c} \cos(2\psi_c + \xi) \sin\xi \, dz + \\ + \frac{b}{2} q^{2\beta-3} \int\limits_{y_c}^{y} \frac{t_c}{z^\beta} \cos(2\psi_c + 2\xi) \, dz. \quad (33)$$

В этом уравнении под знаками интегралов аргументы z и q функций $\xi(z,q)$, $t_c(z,q)$, $t_c'(z,q)$ и $\psi_c(z,q)$ не указаны для краткости записи, а слагаемое ϕ_0 определено равенством

$$\phi_0(y,q) \equiv -\frac{b}{2} q^{2\beta-3} \int\limits_{z_c}^{y} \frac{dz}{z^\beta t_c(z,q)}.$$

Заметим, что наше уравнение (33) принадлежит тому же классу уравнений, что и фазовое уравнение (см. [9], с. 228, уравнение (7)), исследованное в работе [9] методом последовательных приближений. Поэтому можно воспользоваться основным выводом этой работы и заключить, что при $q \to 0$ старший член фазовой функции ξ совпадает с неоднородным слагаемым ϕ_0 с точностью порядка $O(q^{2\beta-2})$. Следовательно, искомая низкоэнергетическая асимптотика фазы δ_m, $m = 0, 1, \ldots, m_0$, определяется через функцию ϕ_0 и интеграл χ_0 формулами

$$\delta_m(q) = \lim_{y\to\infty} \phi_0(y,q) = -\frac{b}{2} q^{2\beta-3} \chi_0(q) + O(q^{2\beta-2}),$$

$$\chi_0(q) \equiv \int\limits_{z_c}^{\infty} \frac{dz}{z^\beta t_c(z,q)}. \quad (34)$$

Исследуем эти формулы. Для этого используем определения (11) и (32) нулей y_c и z_c функций p_c и t_c и определения (18) и (19) интеграла χ и функции h.

Пусть $m = 1, 2, \ldots, m_0$, тогда $y_c \neq 0$, $z_c \neq 0$ и оба интеграла χ и χ_0 являются однотипными. Поэтому, положив

$$v_0 \equiv \sqrt{1 + 4\lambda(\lambda+1)q^2} = \sqrt{1 + (2mq)^2 - q^2} = \sqrt{v^2 - q^2},$$

можно вычислить интеграл χ_0 тем же способом, что и интеграл χ, а затем из формул (34) получить искомую низкоэнергетическую асимптотику

$$\delta_m(q) \sim q^{2\beta-3} h(-v_0) = -\frac{b}{2^\mu} q^{2\beta-3} \Gamma(\beta-1) \sqrt{\frac{\pi}{4v_0}} (v_0^2 - 1)^{\mu/2} P_\nu^\mu(-1/v_0).$$

Так как $v_0 = v + O(q^2)$ при $q \to 0$, старшее слагаемое такой асимптотики совпадает со старшим слагаемым асимптотики (20). Поэтому соотношения (28)–(30), выведенные в п. 3.3 при условии $m > |b|^{1/2(\beta-1)}$, являются низкоэнергетическими асимптотиками фаз δ_m и в рассмотренном случае $m = 0, 1, \ldots, m_0$, но $m_0 \leqslant |b|^{1/2(\beta-1)}$.

3. АСИМПТОТИКИ АМПЛИТУД ДВУМЕРНОГО РАССЕЯНИЯ

В настоящем разделе последовательно выводятся и исследуются низкоэнергетические асимптотики амплитуды рассеяния f^c кулоновским потенциалом V_c, амплитуды рассеяния f^β, порожденной потенциалом V_β в кулоновском поле, и амплитуды рассеяния $f = f^c + f_\beta$ суммарным потенциалом (1). Амплитуда f называется полной амплитудой.

Нам потребуются известные соотношения [1]: формула суммирования Пуассона

$$\sum_{m=0,\pm1,\ldots} S(m,\vartheta) = \sum_{n=0,\pm1,\ldots} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(t,\vartheta)\, \exp(2\pi\,\imath\, n\, t)\, dt, \quad \vartheta \in [0, \pi/2], \tag{35}$$

и асимптотические оценки интеграла

$$F(|\eta|) \equiv \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left[\imath|\eta|\, Q(s)\right]\, W(s)\, ds, \quad |\eta| \to \infty, \tag{36}$$

методом стационарной фазы. Согласно этому методу, если производная $Q'(s)$ не имеет нулей на полуоси $s \geqslant 0$, то $F(|\eta|) = O(|\eta|^{-1})$, если же уравнение $Q'(s) = 0$ имеет один простой корень $s = s_0 \in (0, \infty)$, то

$$F(|\eta|) = \left[\frac{2\pi}{|\eta\, Q''(s_0)|}\right]^{1/2} \left[W(s_0) + O(|\eta|^{-1})\right] \exp\left[\imath|\eta|\, Q(s_0) + \right. \\ \left. + \imath\,(\pi/4)\, \mathrm{sign}\, Q''(s_0)\right]. \tag{37}$$

Как известно [10], в случае центрального потенциала все фазы двумерного рассеяния являются четными функциями их номера m. Следовательно, верны равенства

$$\delta^c_{-m}(\eta) = \delta^c_m(\eta), \quad \delta_{-m}(q) = \delta_m(q), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Положим по определению $\vartheta = \varphi/2$, где φ — угол рассеяния. Следует напомнить, что $\varphi \in [0, \pi]$. Поэтому $\vartheta \equiv \varphi/2 \in [0, \pi/2]$.

3.1. Асимптотика кулоновской амплитуды. Используем известное разложение [10]

$$f^c(\vartheta,\eta)=\sqrt{\frac{2|\eta|R}{\imath\,\pi}}\sum_{m=0,\pm1,\ldots}\left\{\exp\left[2\,\imath\,\delta^c_{|m|}(\eta)\right]-1\right\}\exp(2\,\imath\,m\,\vartheta). \qquad (38)$$

Такое разложение сходится равномерно, если $q>0$, а $\vartheta\in(0,\pi/2)$. Это утверждение доказано в работах [4] и [6] разными способами. Всюду ниже полагается, что $\vartheta\in(0,\pi/2)$.

Приступим к выводу асимптотики амплитуды f^c при $q\to0$. Сначала в ее разложении (38) заменим все кулоновские фазы $\delta^c_{|m|}$ их равномерными по номеру m низкоэнергетическими, заданными равенствами (13) и (14). Затем воспользуемся формулой суммирования Пуассона (35) и представим амплитуду f^c в виде ряда, содержащего интегралы по оси $-\infty<t<\infty$. Каждый $(n=0,\pm1,\ldots)$ интеграл по оси $-\infty<t<\infty$ заменим суммой интеграла по полуоси $-\infty<t\leqslant0$ и интеграла по полуоси $0\leqslant t<\infty$. В интеграле по полуоси $-\infty<t\leqslant0$ выполним замену $t\to-t$. Во всех интегралах перейдем к переменной интегрирования $s=t/|\eta|$. Таким образом, получим асимптотическое $(q\to0)$ представление

$$f^c(\vartheta,\eta)=|\eta|^{3/2}\sqrt{\frac{2R}{\imath\,\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[F^+_n(\vartheta,\eta)+F^-_n(\vartheta,\eta)\right]+O(\sqrt{q}) \qquad (39)$$

кулоновской амплитуды f^c через интегралы типа (36) с большим параметром $|\eta|$:

$$F^\pm_n(\vartheta,\eta)\equiv\int_0^\infty\left\{\exp\left[\imath|\eta|Q^\pm_n(s,\vartheta)\right]-\exp\left[2\,\imath|\eta|\,s\,(\pi n\mp\vartheta)\right]\right\}ds. \qquad (40)$$

Исследуем интегралы $F^\pm_n$. Согласно формулам (13) и (14) в таких интегралах подынтегральные функции содержат фазы $2s\,(\pi n\pm\vartheta)$ и

$$Q^\pm_n(s,\varphi)\equiv2s\,(\pi n\mp\vartheta)+\omega(\eta)+\alpha\left[\ln(1+s^2)+2s\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{s}\right]. \qquad (41)$$

Производная первой из этих фаз по аргументу s не имеет нулей на интервале $0<\vartheta<\pi/2$. При том же условии уравнение

$$\partial_sQ^\pm_n(s,\vartheta)=2\pi n\mp2\,\vartheta+2\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{s}=0 \qquad (42)$$

не имеет корней, если $n\neq0$. В случае $n=0$ это уравнение имеет единственный корень

$$s_0(\varphi)=\mathrm{ctg}\,\vartheta\in(0,\infty),\quad \vartheta\in(0,\pi/2), \qquad (43)$$

если $\alpha = 1$ и у функций $Q_0^{\pm}$ и $\mp\varphi$ выбран верхний знак или же, если $\alpha = -1$, но у функций $Q_0^{\pm}$ и $\mp\varphi$ выбран нижний знак. В точке $s = s_0$ производная $\partial_s^2 Q_0^{\pm}$ не обращается в нуль:

$$\partial_s^2 Q_0^{\pm}(s,\vartheta) = \mp\frac{2}{1+s^2} = \mp\, 2\,[\sin\vartheta]^2 \neq 0, \quad s = s_0(\vartheta), \quad \vartheta \in (0,\pi). \tag{44}$$

Следовательно, корень s_0 является не только единственным, но простым. Поэтому для оценки интегралов (40) с номером $n = 0$ можно применить формулу (37). В результате получатся низкоэнергетические асимптотики

$$F_0^{\pm}(\vartheta,\eta) = G^{\pm}(\vartheta,\eta) + O(q^{3/2}), \tag{45}$$

в которых

$$G^{\pm}(\vartheta,\eta) \equiv \sqrt{2\pi q}\, \exp\left[-\imath\pi\,(1\pm 1)/4\right]\, \exp\left[\imath\,\omega(\eta)\right]\, [\sin\vartheta]^{-1-2\imath\eta} \tag{46}$$

и берется верхний или нижний знак, если $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$.

Итак, при любом α все интегралы $F_n^{\pm}$ с номером $n \neq 0$ не имеют стационарных точек, в случае $\alpha = 1$ стационарную точку $s = s_0$ имеет интеграл F_0^{+}, а в случае $\alpha = -1$ та же точка является стационарной для интеграла F_0^{-}. В пределе $q \to 0$ интегралы $F_n^{\pm}$, $n \neq 0$, бывают как $O(q)$. В том же пределе интегралы $F_0^{\pm}$ убывают медленнее, а именно как $O(\sqrt{q})$. Поэтому старшее слагаемое низкоэнергетической асимптотики кулоновской амплитуды (39) в случае $\alpha = 1$ определяется интегралом F_0^{+}, а в случае $\alpha = -1$ — интегралом F_0^{-}.

В разложении (39) заменим интегралы $F_0^{\pm}$ их асимптотиками, заданными формулами (45) и (46), а для всех интегралов $F_n^{\pm}$, $n \neq 0$, используем асимптотическую оценку $O(q)$. В итоге получится низкоэнергетическая асимптотика кулоновской амплитуды

$$f^c(\vartheta,\eta) = g_c(\vartheta,\eta) + O(1) \tag{47}$$

со старшим слагаемым

$$g_c(\vartheta,\eta) \equiv \sqrt{-\imath\, R\,|\eta|^2}\, \exp\left(-\imath\,\alpha\,\pi/4\right)\, \exp\left[\imath\,\omega(\eta)\right]\, [\sin\vartheta]^{-1-2\imath\eta}\,. \tag{48}$$

Стоит отметить интересный факт: если в известном явном представлении [3]

$$f^c(\vartheta,\eta) = \sqrt{-\imath\, R\,|\eta|}\,\frac{\Gamma(1/2+\imath\eta)}{\Gamma(-\imath\eta)}\, [\sin\vartheta]^{-1-2\imath\eta} \tag{49}$$

заменить обе гамма-функции их известными асимптотиками [13] при $|\eta| \to \infty$, то получатся те же самые формулы (47) и (48).

3.2. Асимптотическое представление амплитуды f_β через интегралы. Исходным будет известное в теории двумерного рассеяния [10] разложение

$$f_\beta(\vartheta,\eta) = \sqrt{\frac{2|\eta|R}{\imath\,\pi}} \sum_{m=0,\pm1,\dots} \exp\left[2\,\imath\,\delta^c_{|m|}(\eta)\right] \times \\ \times \left\{\exp\left[2\,\imath\,\delta_{|m|}(q)\right] - 1\right\} \exp(2\,\imath\, m\,\vartheta). \quad (50)$$

Выведем из него ключевое асимптотическое ($q \to 0$) представление амплитуды f_β через интегралы по полуоси $[0,\infty)$. Для этого применим способ, подробно изложенный в п. 3.1. Сначала в представлении (50) заменим все фазы $\delta^c_{|m|}$ и $\delta_{|m|}$ их соответствующими равномерными по номеру m асимптотиками, определенными равенствами (13), (14) и (20). Затем применим формулу суммирования Пуассона (35) и представим амплитуду f_β в виде ряда, содержащего интегралы по полуоси $0 \leqslant t < \infty$. В этих интегралах положим $t = |\eta|s$, а символами $Q^\pm_n$ обозначим кулоновские функции, заданные равенствами (41). В итоге получится искомое низкоэнергетическое представление амплитуды f_β,

$$f_\beta(\vartheta,\eta) = |\eta|^{3/2}\sqrt{\frac{2R}{\imath\,\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\Phi^+_n(\vartheta,\eta) + \Phi^-_n(\vartheta,\eta)\right] + O(\sqrt{q}), \qquad (51)$$

через интегралы типа (36) с большим параметром $|\eta|$:

$$\Phi^\pm_n(\vartheta,\eta) \equiv \int\limits_0^\infty \exp\left[\imath|\eta|Q^\pm_n(s,\vartheta)\right] \left\{\exp\left[2\,\imath\, q^{2\beta-3}\, h(\alpha\sqrt{1+s^2})\right] - 1\right\} ds. \quad (52)$$

Анализ асимптотик всех таких интегралов и обеих амплитуд f_β и f придется выполнить в трех случаях: $\beta > 3/2$, $\beta = 3/2$ и $\beta < 3/2$.

3.3. Асимптотики амплитуд f_β и f в случае $\beta > 3/2$. В этом случае $\mu = 3/2 - \beta < 0$, а $q^{2\beta-3} \to 0$, если $q \to 0$. Поэтому в интегралах (52) множитель, заключенный в фигурные скобки, не осциллирует в пределе $q \to 0$, но в том же пределе, как в исследованных выше кулоновских интегралах (40), быстроосциллирующими являются те же самые экспоненты с показателями $2\,\imath\,|\eta|s(\pi n \pm \vartheta)$ и $\imath\,|\eta|Q^\pm_n$. Следовательно, остаются в силе и уравнение (42), и оба равенства (43) и (44). Поэтому все интегралы $\Phi^\pm_n$ с номером $n \neq 0$ не имеют стационарных точек, а оба интеграла Φ^+_0 и Φ^-_0 имеют одну и ту же стационарную точку $s_0 = \operatorname{ctg}\vartheta$. Используя равенства

$$h(\alpha\sqrt{1+s^2}) = h(\alpha \operatorname{cosec}\vartheta), \quad s = s_0 = \operatorname{ctg}\vartheta,$$

и формулы (37), (44), (52), найдем вклад от точки s_0 в асимптотики интегралов $\Phi^\pm_0$. Полученные таким образом асимптотики представим через кулоновские функции $G^\pm$, заданные равенствами (46). Итоговое асимптотическое

$(q \to 0)$ соотношение запишем в виде

$$\Phi_0^{\pm}(\varphi,\eta) = \left\{\exp\left[2\,\imath\, q^{2\beta-3}\, h(\pm\operatorname{cosec}\vartheta)\right] - 1\right\}\, G^{\pm}(\varphi,\eta) + O(q^{3/2}). \tag{53}$$

В этом соотношении берутся верхние или нижние знаки, если $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$, а функция $h(\pm\operatorname{cosec}\vartheta)$ согласно ее определению (19) вычисляется по формуле

$$h(\alpha\operatorname{cosec}\vartheta) = -\frac{b}{2^{\mu}}\sqrt{\frac{\pi}{4}}\,\Gamma\left(\beta-1\right)\,\left[\sin\vartheta\right]^{\beta-1}\,\left[\cos\vartheta\right]^{\mu}\,P_{\nu}^{\mu}(\alpha\sin\vartheta) \tag{54}$$

и поэтому является непрерывной на интервале $0 < \vartheta < \pi/2$.

Итак, в пределе $q \to 0$ все интегралы $\Phi_n^{\pm}$ с номером $n \neq 0$ не имеют стационарных точек и поэтому убывают как $O(q)$. В том же пределе интегралы $\Phi_0^{\pm}$ имеют одну стационарную точку и убывают медленнее, а именно как $O(\sqrt{q})$. Поэтому старшее слагаемое низкоэнергетической асимптотики амплитуды (51) в случае $\alpha = 1$ определяется интегралом Φ_0^{+}, а в случае $\alpha = -1$ — интегралом Φ_0^{-}. Асимптотики (53) интегралов $\Phi_0^{\pm}$ содержат в качестве множителей кулоновские функции $G^{\pm}$. Поэтому низкоэнергетическая асимптотика разложения (53) амплитуды f_{β} представляется через старшее слагаемое g_c асимптотики (47) кулоновской амплитуды f^c формулой

$$f_{\beta}(\vartheta,\eta) = \left\{\exp\left[2\,\imath\, q^{2\beta-3}\, h(\alpha\operatorname{cosec}\vartheta)\right] - 1\right\}\, g_c(\varphi,\eta) + O(1). \tag{55}$$

Вследствие этой формулы полная амплитуда рассеяния $f = f^c + f_{\beta}$ имеет следующую низкоэнергетическую асимптотику:

$$f(\vartheta,\eta) = \exp\left[2\,\imath\, q^{2\beta-3}\, h(\alpha\operatorname{cosec}\vartheta)\right]\, g_c(\vartheta,\eta) + O(1). \tag{56}$$

Для полноты исследуем поведение угловой функции h в пределах $\vartheta \to 0$ и $\vartheta \to \pi/2$.

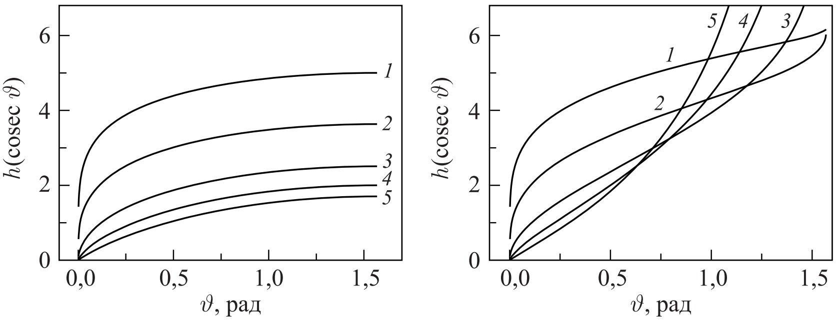
Пусть $\vartheta \to 0$. Тогда вследствие равенств (21) и (54) в обоих случаях $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$

$$h(\alpha\operatorname{cosec}\vartheta) = -\frac{b}{2}\,\cos\left[\frac{\pi}{2}(\beta-1)\right]\, B\left(\beta-1, 1-\frac{\beta}{2}\right)\times \\ \times\left[\sin\vartheta\right]^{\beta-1}\left[1 + O(\vartheta^2)\right]. \tag{57}$$

Следовательно, в точке $\vartheta = 0$ обе функции $h(\operatorname{cosec}\vartheta)$ и $h(-\operatorname{cosec}\vartheta)$ обращаются в нуль.

Теперь пусть $\vartheta \to \pi/2$. Тогда в случае $\alpha = 1$ благодаря соотношению (23)

$$h(\alpha\operatorname{cosec}\vartheta) = -\frac{b}{2}\, B\left(\beta-1, \frac{1}{2}\right)\,\left[1 + O\left((\pi - 2\,\vartheta)^2\right)\right], \tag{58}$$



Графики функций $h(\operatorname{cosec}\vartheta)$ и $h(-\operatorname{cosec}\vartheta)$ при $b = -\sqrt{8/\pi}$ и значениях $\beta = 1{,}2$; $1{,}3$; $1{,}5$; $1{,}7$; $1{,}9$ — кривые *1*, *2*, *3*, *4* и *5* соответственно

а в случае $\alpha = -1$ вследствие представления (25)

$$h(\alpha \operatorname{cosec}\vartheta) = -\frac{b}{2}\,B\left(\beta - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1-\sin\vartheta}{2}\right]^{\mu}\left[1 + O\left((\pi - 2\,\vartheta)^2\right)\right]. \quad (59)$$

Значит, в пределе $\vartheta \to \pi/2$ функция $h(\operatorname{cosec}\vartheta)$ стремится к конечной, но ненулевой константе $h(\infty)$, а модуль функции $h(-\operatorname{cosec}\vartheta)$ неограниченно растет как $O((\pi - 2\,\vartheta)^{2\mu})$.

Наглядное представление о поведении функций $h(\operatorname{cosec}\vartheta)$ и $h(-\operatorname{cosec}\vartheta)$ дает рисунок. Изображенные на нем кривые *4* и *5* являются графиками этих функций при $b = -\sqrt{8/\pi}$ и значениях $\beta = 1,7$ и $\beta = 1,9$, удовлетворяющих неравенству $\beta > 3/2$.

Теперь выявим физические значимые следствия найденных угловых асимптотик (57)–(59) функций $h(\pm\operatorname{cosec}\vartheta)$. Для этого будем использовать представления (47), (55) и (56) амплитуд f^c, f_β и f.

В случае кулоновского отталкивания ($\alpha = 1$), как и в случае кулоновского притяжения ($\alpha = -1$), кулоновская амплитуда f^c в пределе $\vartheta \to 0$ имеет неаналитическую угловую особенность, порождаемую множителем $[\sin\vartheta]^{-1-2\imath\eta}$. В этих же случаях в представлении (56) полной амплитуды f функция $h(\alpha\operatorname{cosec}\vartheta)$ обращается в нуль в точке $\vartheta = 0$. Поэтому в пределе $\vartheta \to 0$ полная амплитуда f имеет особенность того же типа. По той же причине благодаря определению (48) функции g_c и асимптотике (57) функции h из равенства (55) следует, что поведение амплитуды f_β в пределе $\vartheta \to 0$, $\alpha \pm 1$, $q \ll 1$ определяется формулой

$$f_\beta(\vartheta, \eta) \sim -b\sqrt{R}\,q^{2\beta-2}\;\frac{\exp\{\imath\,[\omega(\eta) + (1-\alpha)\pi/4]\}}{2\,[\sin\vartheta]^{2-\beta+2\imath\eta}}\times$$
$$\times\cos\left[\frac{\pi}{2}(\beta - 1)\right]\,B\left(\beta - 1, 1 - \frac{\beta}{2}\right). \quad (60)$$

В точке $\vartheta = \pi/2$ амплитуда f^c, $\alpha = \pm 1$, принимает вполне определенное, причем конечное значение. В случае $\alpha = 1$ благодаря неравенству $|h(\infty)| < \infty$ этим же свойством обладают обе амплитуды f_β и f. Если $\alpha = -1$ и $\vartheta \to \pi/2$, то вследствие неограниченного роста модуля функции $h(-\operatorname{cosec}\vartheta)$ обе амплитуды f_β и f в отличие от амплитуды f^c быстро осциллируют и поэтому не определены в точке $\vartheta = \pi/2$.

Покажем, что в случае $\alpha = 1$ представления (55) и (56) амплитуд f_β и f можно упростить. Итак, пусть $\alpha = 1$. Тогда функция h ограничена на всем отрезке $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$. Поэтому на этом же отрезке, но при достаточно малом q выполняется неравенство

$$|2\imath\, q^{2\beta-3} h(\operatorname{cosec}\vartheta)| \ll 1.$$

Оно позволяет приблизить содержащуюся в исходных представлениях (55) и (56) экспоненциальную функцию суммой двух слагаемых ее разложения в ряд Лорана и в итоге на всем отрезке $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$ получить два более простых, чем исходные, представления: представление

$$f_\beta(\vartheta, \eta) = \left[2\imath\, q^{2\beta-3}\, h(\operatorname{cosec}\vartheta) + O(q^{4\beta-6})\right]\, g_c(\vartheta, \eta) + O(1)$$

и представление

$$f(\vartheta, \eta) = \left[1 + 2\imath\, q^{2\beta-3}\, h(\operatorname{cosec}\vartheta) + O(q^{4\beta-6})\right]\, g_c(\vartheta, \eta) + O(1).$$

3.4. Асимптотики амплитуд f_β и f в случае $\beta = 3/2$. В этом случае $\mu = 3/2 - \beta = 0$, а $q^{2\beta-3} = 1$ при любом q. Поэтому во всех интегралах $\Phi_n^\pm$, заданных формулами (52), множитель, заключенный в фигурные скобки не зависит от q. Следовательно, в пределе $q \to 0$ все интегралы $\Phi_n^\pm$, $n \neq 0$, убывают как $O(q)$, а низкоэнергетические асимптотики интегралов $\Phi_0^\pm$ равны произведениям этого множителя, взятого в точке $s = s_0$, и асимптотик (45) кулоновских интегралов $F_0^\pm$. Эти произведения порождают низкоэнергетическую асимптотику разложения (50) амплитуды f_β,

$$f_\beta(\vartheta, \eta) = \exp\left[2\imath\, h(\alpha \operatorname{cosec}\vartheta) - 1\right]\, g_c(\vartheta, \eta) + O(1), \qquad (61)$$

и соответствующую асимптотику амплитуды f,

$$f(\vartheta, \eta) = \exp\left[2\imath\, h(\alpha \operatorname{cosec}\vartheta)\right]\, g_c(\vartheta, \eta) + O(1). \qquad (62)$$

В рассматриваемом случае $\mu = 0$. Поэтому представление (54) функции h принимает вид

$$h(\alpha \operatorname{cosec}\vartheta) = -\frac{\pi}{2}\, b\, \sqrt{\sin\vartheta}\, P_\nu(\alpha \sin\vartheta),$$

а угловые асимптотики (57) и (58) этой функции вырождаются в асимптотики

$$h(\pm\operatorname{cosec}\vartheta) = -\frac{b}{2^{3/2}}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\sqrt{\sin\vartheta}\,\left[1+O(\vartheta^2)\right], \quad \vartheta\to 0,$$

и асимптотику

$$h(\operatorname{cosec}\vartheta) = -\frac{\pi}{2}\,b\,\left[1+O\left((\pi-2\,\vartheta)^2\right)\right], \quad \vartheta\to\pi/2.$$

Вследствие соотношения (26) верна асимптотика

$$h(-\operatorname{cosec}\vartheta) = \frac{b}{2}\left\{\ln\left[1-\sin\vartheta\right]-\gamma-5\ln 2\right\}\left[1+O\left((\pi-2\vartheta)^2\right)\right], \quad \vartheta\to\pi/2.$$

Поведение функций $h(\operatorname{cosec}\vartheta)$ и $h(-\operatorname{cosec}\vartheta)$ поясняет рисунок. Изображенные на нем кривые *3* — графики этих функций в рассматриваемом случае $\beta=3/2$.

Согласно перечисленным выше асимптотикам функции $h(\pm\operatorname{cosec}\vartheta)$ обращаются в нуль в точке $\vartheta=0$; в пределе $\vartheta\to\pi/2$ функция $h(\operatorname{cosec}\vartheta)$ стремится к конечной, но ненулевой константе, а модуль функции $h(-\operatorname{cosec}\vartheta)$ неограниченно возрастает как $O(\ln(\pi-2\,\vartheta))$. Следовательно, при $\vartheta\to 0$ или $\vartheta\to\pi/2$ амплитуды f_β и f, заданные равенствами (61) и (62), обладают теми же свойствами, что и в случае $\beta>3/2$, исследованном в п. 4.3. Поведение амплитуды $f_\beta(\vartheta,\eta)$ при $\vartheta\to 0$ определяется формулой (60), $\beta=3/2$.

3.5. Асимптотики амплитуд f_β и f в случае $\beta<3/2$. В этом случае $\mu=3/2-\beta>0$, а $q^{2\beta-3}\to\infty$ при $q\to 0$. Поэтому в интегралах (52) множитель, заключенный в фигурные скобки, содержит быстроосциллирующую экспоненту. Для анализа этих интегралов более удобным будет представление

$$\Phi_n^{\pm}(\vartheta,\eta) = \int\limits_0^\infty \left\{\exp\left[\imath|\eta|T_n^{\pm}(s,\vartheta)\right]-\exp\left[\imath|\eta|Q_n^{\pm}(s,\vartheta)\right]\right\}\,ds. \qquad (63)$$

В этом представлении $Q_n^{\pm}$ — функции (41), а $T_n^{\pm}$ — следующие суммы:

$$T_n^{\pm}(s,\vartheta)\equiv Q_n^{\pm}(s,\vartheta)+4\,q^{2\beta-2}\,h(\alpha\sqrt{1+s^2}). \qquad (64)$$

В пределе $q\to 0$ вторые слагаемые этих сумм стремятся к нулю как $O(q^{2\beta-2})$. Именно это обстоятельство существенно упростит наш вывод явного представления низкоэнергетической асимптотики амплитуды f_β. Для вывода такого представления достаточно лишь оценить по порядку величины все функции, убывающие в пределе $q\to 0$ быстрее функции $q^{2\beta-2}$. Так и поступим. Обозначив символами $h'(z)$ и $h''(z)$ первую и вторую производные функции $h(z)$ по ее аргументу z, перейдем к исследованию интегралов (63).

Сначала найдем стационарные точки фазы $T_n^\pm$. Они являются корнями уравнения

$$\partial_s T_n^\pm(s,\vartheta) = 2\pi n \mp 2\,\vartheta + 2\,\alpha \operatorname{arctg}\frac{1}{s} + \\ + q^{2\beta-2}\frac{4\,\alpha\,s}{\sqrt{1+s^2}}\,h'(\alpha\sqrt{1+s^2}) = 0. \quad (65)$$

Так как $q^{2\beta-2} \ll 1$, а $\varphi \in (0,\pi)$, то уравнение (65) имеет единственный корень $s_1^\pm > 0$ только в следующем случае: $n = 0$, при $\alpha = 1$ выбран верхний знак, а при $\alpha = -1$ — нижний. Ясно, что корень $s_1^\pm$ является бесконечным рядом по целым степеням малого параметра $q^{2\beta-2}$. Используя подстановку

$$s_1^\pm(\vartheta,q) = s_0(\vartheta) + q^{2\beta-2}\,\xi^\pm(\vartheta) + O\left(q^{4\beta-4}\right), \quad s_0(\vartheta) = \operatorname{ctg}\vartheta, \qquad (66)$$

и ряды Тейлора

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{s_1^\pm} = \operatorname{arctg}\frac{1}{s_0} - \frac{s_1^\pm - s_0}{1+s_0^2} + \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(s_1^\pm)^2}} = \frac{1}{(1+s_0^2)^{1/2}} - s_0\frac{s_1^\pm - s_0}{(1+s_0^2)^{3/2}} + \ldots,$$

сведем уравнение (65) к уравнению для искомой функции $\xi^\pm$. Найдем ее и представим как

$$\xi^\pm(\vartheta) = 2\,s_0\sqrt{1+s_0^2}\,h'\left(\pm\sqrt{1+s_0^2}\right) = 2\,\frac{\cos\vartheta}{[\sin\vartheta]^2}\,h'\left(\pm\operatorname{cosec}\vartheta\right). \qquad (67)$$

Теперь найдем асимптотики интегралов $\Phi_n^\pm$ в пределе $|\eta| \to \infty$. Все интегралы $\Phi_n^\pm$ с номером $n \neq 0$ не имеют стационарных точек и поэтому убывают в этом пределе как $O(q)$. В интегралах $\Phi_0^\pm$ обе фазы $T_0^\pm$ и $Q_0^\pm$ имеют стационарные точки $s_1^\pm$ и $s_0^\pm$. Используя формулы (37), (44) и (46), найдем вклад от таких точек в интегралы $\Phi_0^\pm$. Полученные асимптотики этих интегралов выразим через функции $G^\pm$, заданные формулами (46), и функции

$$Z^\pm(\vartheta) \equiv \left(\partial_s^2 Q_0^\pm(s,\vartheta)|_{s=s_0}\right) / \left(\partial_s^2 |T_0^\pm(s,\vartheta)|_{s=s_1}\right). \qquad (68)$$

Итоговое асимптотическое $(q \to 0)$ представление запишем в виде

$$\Phi_0^\pm(\vartheta,\eta) = G^\pm(\vartheta,\eta)\sqrt{|Z^\pm(\vartheta)|}\,\exp\left\{\imath|\eta|\left[T_0^\pm(s_1^\pm,\vartheta) - Q_0^\pm(s_0,\vartheta)\right]\right\}\times \\ \times\exp\left\{\imath\frac{\pi}{4}\left[\operatorname{sgn}\partial_s^2 T_0^\pm(s,\vartheta)|_{s=s_1} - \operatorname{sgn}\partial_s^2 Q_0^\pm(s,\vartheta)|_{s=s_0}\right]\right\} - \\ - G^\pm(\vartheta,\eta) + O(q^{3/2}). \quad (69)$$

Чтобы упростить это представление, необходимо вывести вспомогательные формулы.

Сначала оценим разность значений функции $Q_0^{\pm}(s,\vartheta)$ в точках $s = s_1^{\pm}$ и $s = s_0$. Согласно равенствам (42) и (66) производная $\partial_s Q_0^{\pm}(s,\vartheta)$ в точке $s = s_0$ равна нулю, а квадрат разности $s_1^{\pm} - s_0$ убывает как $O(q^{4\beta-4})$. Следовательно, разложение функции $Q_0^{\pm}(s,\vartheta)$ в ряд Тейлора с центром в точке $s = s_0$ порождает искомую асимптотическую $(q \to 0)$ оценку

$$Q_0^{\pm}(s_1^{\pm},\vartheta) - Q_0^{\pm}(s_0,\vartheta) = \frac{1}{2}\,(s_1^{\pm} - s_0)^2\, \partial_s^2 Q^{\pm}(s,\vartheta)|_{s=s_0} + \ldots = O(q^{4\beta-4}).$$

Благодаря этой оценке и равенствам (64), (66) верно низкоэнергетическое представление

$$T_0^{\pm}(s_1^{\pm},\vartheta) = Q_0^{\pm}(s_0,\vartheta) + 4\,q^{2\beta-2}\,h(\pm\operatorname{cosec}\vartheta) + O(q^{4\beta-4}). \qquad (70)$$

Теперь найдем разность значений функции $\partial_s^2 Q_0^{\pm}(s,\vartheta)$ в точках $s = s_1^{\pm}$ и $s = s_0$. В силу представления (44) этой функции и ее разложения в ряд Тейлора с центром в точке $s = s_0$

$$\partial_s^2 Q_0^{\pm}(s,\vartheta)|_{s=s_1^{\pm}} - \partial_s^2 Q_0^{\pm}(s,\vartheta)|_{s=s_0} = \\ = \pm\,4\,q^{2(\beta-1)}\,\frac{s_0}{(1+s_0^2)^2}\,\xi^{\pm}(\vartheta) + O(q^{4\beta-4}). \qquad (71)$$

Осталось выразить значения функций $\partial_s^2 T_0^{\pm}(s,\vartheta)$ в точках $s = s_1^{\pm}$ через значение функций $\partial_s^2 Q_0^{\pm}(s,\vartheta)$ в точке $s = s_0$, равное $-2\alpha\,[\sin(2\vartheta)]^2$, и производные $h'(z)$ и $h''(z)$ функции $h(z)$ по ее аргументу $z = \alpha\operatorname{cosec}\vartheta$. Для этого используем определения (64), (67) функций $T_0^{\pm}$, $\xi^{\pm}$ и равенство (71). В итоге получаем искомое низкоэнергетическое представление

$$\partial_s^2 T_0^{\pm}(s,\vartheta)|_{s=s_1^{\pm}} = -2\,\alpha\,[\sin\vartheta]^2\left[1 - 2\,q^{2\beta-2}\,\tau(\vartheta;\alpha)\right] + O(q^{4\beta-4}), \qquad (72)$$

в котором по определению

$$\tau(\vartheta;\alpha) \equiv \operatorname{cosec}\vartheta\left\{1 + [\cos\vartheta]^2\right\} h'\left(\alpha\operatorname{cosec}\vartheta\right) + \\ + \alpha\,[\operatorname{ctg}\vartheta]^2\; h''\left(\alpha\operatorname{cosec}\vartheta\right). \qquad (73)$$

Здесь и всюду ниже знак плюс или минус соответствует $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$.

Упростим представление (69) асимптотик интегралов $\Phi_0^{\pm}$. Вследствие определения (68) функций $Z^{\pm}$ и представлений (44) и (72) имеем

$$\sqrt{|Z^{\pm}(\vartheta)|} = 1 + q^{2\beta-2}\,\tau(\vartheta;\alpha) + O\left(q^{4\beta-4}\right), \quad q \to 0, \quad \vartheta \in (0,\pi/2).$$

Используя это соотношение и равенство (70), сводим исходное представление (69) к более простому представлению:

$$\Phi_0^{\pm}(\vartheta,\eta) = G^{\pm}(\vartheta,\eta)\ \left\{1 + q^{2\beta-2}\,\tau(\vartheta;\alpha)\right\} \exp\left[2\,\imath\, q^{2\beta-3}\, h(\alpha\,\mathrm{cosec}\,\vartheta)\right] \times \\ \times \left[1 + O(q^{4\beta-4})\right] - G^{\pm}(\vartheta,\eta) + O(q^{3/2}). \quad (74)$$

В этом представлении кулоновские функции $G^{\pm}$, определенные равенствами (46), являются сомножителями. Именно поэтому низкоэнергетическая асимптотика разложения (53) амплитуды f_β выражается через старшее слагаемое g_c асимптотики (47) кулоновской амплитуды f^c формулой

$$f_\beta(\vartheta,\eta) = g_c(\vartheta,\eta)\ \left\{1 + q^{2\beta-2}\,\tau(\vartheta;\alpha)\right\} \exp\left[2\,\imath\, q^{2\beta-3}\, h(\alpha\,\mathrm{cosec}\,\vartheta)\right] \times \\ \times \left[1 + O(q^{4\beta-4})\right] - g_c(\vartheta,\eta) + O(1). \quad (75)$$

Эта формула порождает следующую низкоэнергетическую асимптотику амплитуды f:

$$f(\vartheta,\eta) = g_c(\vartheta,\eta)\ \left\{1 + q^{2\beta-2}\,\tau(\vartheta;\alpha)\right\} \times \\ \times \exp\left[2\,\imath\, q^{2\beta-3}\, h(\alpha\,\mathrm{cosec}\,\vartheta)\right] \left[1 + O(q^{4\beta-4})\right] + O(1). \quad (76)$$

Полученные неявные асимптотики (75) и (76) станут явными после замены функций h', h'' и τ их представлениями через функции Лежандра. Выведем такие представления из исходного определения (19) функции h. Используя формулу дифференцирования [13]

$$(1-t^2)\,\frac{d}{dt}\,P_\nu^\mu(t) = -\nu\, t\, P_\nu^\mu(t) + (\mu+\nu)\, P_{\nu-1}^\mu(t)$$

и рекуррентное соотношение [13]

$$t\, P_\nu^\mu(t) - P_{\nu+1}^\mu(t) = (\mu+\nu)\,\sqrt{1-t^2}\, P_\nu^{\mu-1}(t),$$

сначала доказываем представление

$$h'\,(\alpha\,\mathrm{cosec}\,\vartheta) = \alpha\,\frac{b}{2^\mu}\,\sqrt{\frac{\pi}{4}}\,\Gamma(\beta+1)\ [\sin\vartheta]^\beta\ [\cos\vartheta]^{\mu-1}\ P_{\nu-1}^{\mu-1}(\alpha\sin\vartheta),$$

а затем и представление

$$h''\,(\alpha\,\mathrm{cosec}\,\vartheta) = \alpha\ \sin\vartheta\, h'\,(\alpha\,\mathrm{cosec}\,\vartheta) - \\ - \frac{b}{2^\mu}\,\sqrt{\frac{\pi}{4}}\,\Gamma(\beta+3)\ [\sin\vartheta]^{\beta+1}\ [\cos\vartheta]^{\mu-2}\ P_{\nu-2}^{\mu-2}(\alpha\sin\vartheta).$$

Наконец, используя эти представления, из определения (73) функции τ выводим равенство

$$\tau(\vartheta;\alpha) = \alpha\,\frac{b}{2^{\mu}}\,\sqrt{\frac{\pi}{4}}\,\Gamma(\beta+1)\ [\sin\vartheta]^{\beta-1}\ [\cos\vartheta]^{\mu-1}\times$$

$$\times\left\{\left[1+2\,(\cos\vartheta)^2\right]\ P^{\mu-1}_{\nu-1}(\alpha\,\sin\vartheta) - (\alpha+1)(\alpha+2)\,P^{\mu-2}_{\nu-2}(\alpha\,\sin\vartheta)\right\}. \quad (77)$$

Теперь исследуем проведение функций h и τ в двух пределах: $\vartheta\to 0$ и $\vartheta\to\pi/2$.

В рассматриваемом случае $(\beta<3/2, \mu>0)$ функция $h(\alpha\,\mathrm{cosec}\,\vartheta)$ имеет асимптотики (57) и (58), а в силу равенств (27) при $\vartheta\to\pi/2$ верно соотношение

$$h(-\mathrm{cosec}\,\vartheta) = -\frac{b}{2}\,B\left(\frac{3}{2}-\beta,\beta-1,\right)\ \left[1+O((\pi-2\,\vartheta)^2)\right].$$

Поэтому обе функции $h(\pm\,\mathrm{cosec}\,\vartheta)$ обращаются в нуль в точке $\vartheta=0$, а в точке $\vartheta=\pi/2$ принимают конечные ненулевые значения. Эти свойства иллюстрирует приведенный в п. 3.3 рисунок. На нем кривые *1* и *2* являются графиками функций $h(\mathrm{cosec}\,\vartheta)$ и $h(-\,\mathrm{cosec}\,\vartheta)$ при значениях $\beta=1,2$ и $\beta=1,3$, удовлетворяющих неравенству $\beta<3/2$.

Перейдем к исследованию функции τ. В ее представлении (77) заменим обе функции Лежандра $P^{\nu-1}_{\mu-1}(t)$ и $P^{\mu-2}_{\nu-2}(t)$, $t\equiv\alpha\,\sin\vartheta$, их известными асимптотиками [13] в пределах $t\to 0$ или $t\to\pm1$. Перечислим полученные таким образом асимптотические соотношения. Благодаря формуле (21) при $\vartheta\to 0$ в обоих случаях $\alpha=1$ или $\alpha=-1$

$$\tau(\vartheta;\alpha) = -\alpha\,\frac{b}{4}\,\beta\,(2-\beta)\,\cos\frac{\pi}{2}(\beta-1)\ [\sin\vartheta]^{\beta-1}\ B\left(\beta,-\frac{\beta}{2}\right)\ \left[1+O(\vartheta^2)\right].$$

Вследствие формулы (23) в случае $\alpha=1$, $\vartheta\to\pi/2$

$$\tau(\vartheta;\alpha) = \frac{b}{4}\,\beta\,B\left(\beta,\frac{1}{2}\right)\ \left[1+O\left((\pi-2\,\vartheta)^2\right)\right].$$

В оставшемся случае $\alpha=-1$, $\vartheta\to\pi/2$

$$\tau(\vartheta;\alpha) = \frac{b}{2^{\mu}}\,B\left(\beta-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\ [1-\sin\,\vartheta]^{\mu}\ \left[1+O\left((\pi-2\,\vartheta)^2\right)\right].$$

Согласно представлению (77) и упомянутым выше угловым асимптотикам обе функции $\tau(\vartheta;1)$ и $\tau(\vartheta;-1)$ являются непрерывными на отрезке $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2$, обращаются в нуль в точке $\vartheta=0$ и принимают конечные ненулевые значения в точке $\vartheta=\pi/2$.

Итак, все функции $h(\pm\operatorname{cosec}\vartheta)$ и $\tau(\vartheta;\pm1)$ равны нулю в точке $\vartheta=0$ и являются непрерывными на всем отрезке $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2$. Поэтому в любом из случаев $\alpha=1$ или $\alpha=-1$ обе амплитуды f_β и f, представленные формулами (75) и (76), в пределе $\vartheta\to\pi/2$ ведут себя так же, как и кулоновская амплитуда f^c. В этих же случаях, но в пределе $\vartheta\to0$, поведение амплитуд f^c и f определяется одним тем же множителем $[\sin\vartheta]^{-1-2\imath\eta}$, а амплитуда f_β имеет асимптотику (60).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе впервые доказаны следующие утверждения.

Фазы $\delta_m(q)$ двумерного рассеяния квантовой частицы потенциалом $V_0\,r^{-\beta}$, $\beta\in(1,2)$, в кулоновском поле имеют явные низкоэнергетические асимптотики (20), (22), (24) и (28)–(30). Явные низкоэнергетические асимптотики амплитуды f_β такого рассеяния и полной амплитуды f вычисляются по формулам (55), (61), (75) и (56), (62), (76). Содержащиеся в этих формулах угловые функции h и τ выражаются через присоединенные функции Лежандра равенствами (54) и (77). При низких энергиях дальнодействующая добавка $V_0\,r^{-\beta}$, $\beta\in[3/2,2)$, к притягивающему ($\alpha=-1$) кулоновскому потенциалу порождает быстрые осцилляции полной амплитуды рассеяния $f(\vartheta,\eta)$ в пределе $\vartheta\to\pi/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федорюк М. В.* Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2009.
2. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
3. *Barton G.* // Amer. J. Phys. 1983. V. 51. P. 420.
4. *Yafaev D.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30. P. 6981.
5. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 2016. Т. 186. С. 123.
6. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 2016. Т. 186. С. 252.
7. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 2016. Т. 188. С. 49.
8. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 2019. Т. 199. С. 405.
9. *Квицинский А. А.* // ТМФ. 1985. Т. 65. С. 226.
10. *Friedrich H.* Scattering Theory // Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 2013. V. 872.
11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1: Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
12. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 3: Специальные функции. М.: Наука, 1981.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра, М.: Наука, 1973.
14. *Dashen A. A.* // Nouvo Cim. 1963. V. 28. P. 229.

Получено 30 октября 2019 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 29.11.2019.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,75. Уч.-изд. л. 1,87. Тираж 225 экз. Заказ № 59817.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/